

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина

*О. Б. Гладких,
О. Н. Белых*

Основные понятия теории графов

Учебное пособие

2008

Рецензенты:

О. Б. Гладких, О. Н. Белых

Основные понятия теории графов: Учебное пособие. – Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2008. –175 с.

В пособии в краткой форме рассмотрены основные определения и понятия теории графов, необходимые для решения некоторых прикладных задач дискретной математики. Каждая тема содержит теоретические сведения, которые для наглядности иллюстрируются рисунками и таблицами. Даны примеры решения типовых задач. Пособие составлено с учётом требований государственного образовательного стандарта, в нём на доступном уровне изложены основополагающие вопросы теории графов, входящие в учебную программу по дисциплине «Дискретная математика».

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов физико-математического факультета, а также для студентов других специальностей, использующих теорию графов для решения задач.

13. Леденёва Т.М. Спец. главы математики. Дискретная математика. Воронеж, 1997.
14. Нефедов В.Н., Осипова В.А. Курс дискретной математики. – М.: Издательство МАИ, 1992.
15. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. Учебник для вузов. – СПб.: Питер, 2005.
16. Носов В.А. Комбинаторика и теория графов. – М.: Мир, 1989.
17. Редькин Н. П. Дискретная математика: Курс лекций для студентов-механиков: Учебник для вузов. – СПб.: Лань, 2003.
18. Романовский И. В. Дискретный анализ: Учебное пособие для вузов. – СПб.: ВHV, 2002.
19. Судоплатов С.В., Овчинников Е.В. Дискретная математика: учебник. – 2-е изд. – М.: ИНФРА – М; Новосибирск: Изд. НГТУ, 2007.
20. Хаггарт Р. Дискретная математика для программистов: учебное пособие для вузов (Гриф УМО) \ Р. Чаггарт. – М.: Техносфера, 2004.
21. Харари Ф. Теория графов. – М.: Мир, 1973.
22. Яблонский С.В. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. М., Наука, 1974.
23. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику: Учебник для вузов. – М.: Физматлит, 2003.

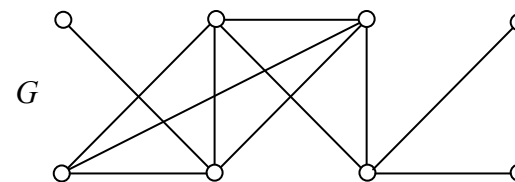
Список литература

1. Акимов О.Е. Дискретная математика: логика, группы, графы. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2003.
2. Белоусов А.И., Ткачев С.Б. Дискретная математика: Учеб. для вузов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2002.
3. Березина Л.Ю. Графы и их применение: Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1979.
4. Берж К. Теория графов и ее применения. – М.: Издательство иностранной литературы, 1962.
5. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Сборник задач по дискретной математике. – М.: Наука, 1997.
6. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по курсу дискретной математики: Учебное пособие для вузов. – М.: Физматлит, 2003.
7. Галушкина Ю.И. Конспект лекций по дискретной математике. – М.: Айрис-пресс, 2007.
8. Горбатов В.А. Дискретная математика. – М.: ООО «Издательство АСТ»: ООО «Издательство Астрель», 2003.
9. Дискретная математика. Методические указания к практическим занятиям. Новосибирск, НГТУ, 1996.
10. Дискретная математика. Программа курса. Для студентов 1 курса направления 351400, 2001 (м/п вариант).
11. Кристофидес Н. Теория графов: алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978.
12. Кузнецов О.П. Дискретная математика для инженеров. – СПб: Изд. «Лань», 2005.

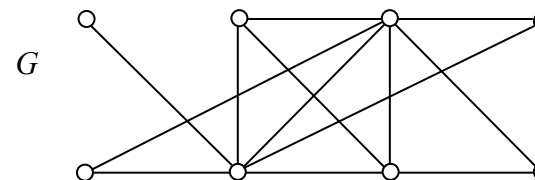
СОДЕРЖАНИЕ

Введение	5
1. Основные характеристики графов.....	9
1.1. Виды и способы задания графов.....	9
1.2. Матричные способы задания графов.....	16
1.3. Изоморфизм графов.....	19
1.4. Маршруты, циклы в неориентированном графе.....	21
1.5. Пути, контуры в ориентированном графе.....	23
1.6. Связность графа.....	25
1.7. Пути во взвешенных ориентированных графах.....	29
1.8. Алгоритм Форда – Беллмана нахождения минимального пути.....	35
1.9. Алгоритм нахождения максимального пути.....	42
1.10. Деревья.....	48
1.11. Минимальные остовные деревья нагруженных графов.....	50
1.12. Раскраски графов.....	55
1.13. Расстояния в графах.....	58
1.14. Фундаментальные циклы.....	60
1.15. Разрезы.....	64
1.16. Операции над графами.....	68
1.17. Внутренняя и внешняя устойчивость графа.....	75
2. Основные теоремы теории графов	79
3. Эйлеровы циклы.....	85
3.1. Основные понятия и определения.....	85
3.2. Критерий существования эйлера цикла.....	86
3.3. Алгоритмы построения эйлера цикла.....	89
3.4. Некоторые родственные задачи.....	93
3.5. Задача китайского почтальона.....	95

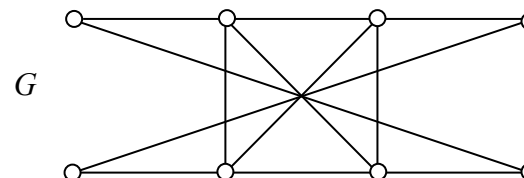
4. Гамильтоновы циклы.....	99
4.1 Основные определения.....	99
4.2. Основные теоремы и их следствия.....	102
4.3. Задача о шахматном коне.....	107
4.4. Факторы.....	108
4.5. Задачи, связанные с поиском гамильтоновых циклов.....	110
5. Задачи по теории графов.....	115
6. Применение теории графов.....	148
6.1. Графы и информация.....	148
6.2. Графы и химия.....	149
6.3. Графы и биология.....	152
6.4. Графы и физика.....	153
6.5. Графы и экономика.....	153
Контрольные вопросы.....	157
Типовые контрольные работы.....	162
Задачи для самостоятельного решения.....	165
Список литературы.....	174

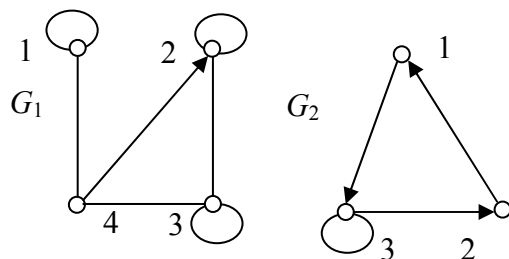


14.3.

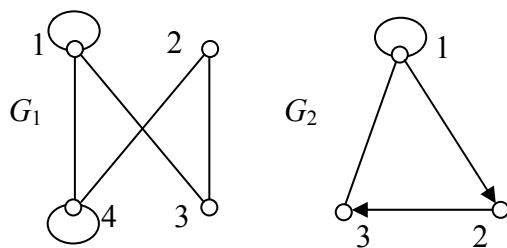


14.4.



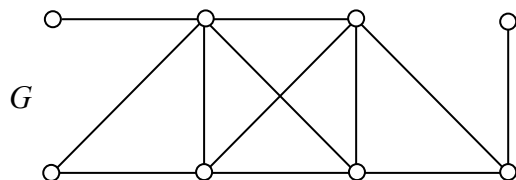


13.4.



14. Найдите матрицы фундаментальных циклов, фундаментальных разрезов, радиус и диаметр, минимальное множество покрывающих цепей графа G . Является ли изображенный граф эйлеровым? Является ли изображенный граф планарным?

14.1.



14.2.

Введение

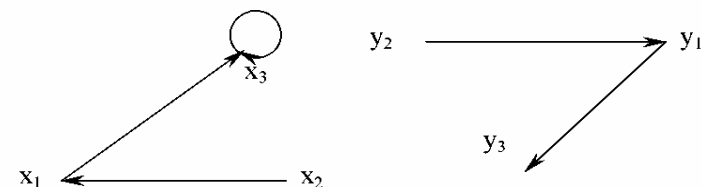
Родоначальником теории графов принято считать математика Леонарда Эйлера (1707-1783). Историю возникновения этой теории можно проследить по переписке великого ученого. Вот перевод латинского текста, который взят из письма Эйлера к итальянскому математику и инженеру Маринони, отправленного из Петербурга 13 марта 1736 года: «Некогда мне была предложена задача об острове, расположенном в городе Кенигсберге и окруженном рекой, через которую перекинута семь мостов. Спрашивается, может ли кто-нибудь непрерывно обойти их, проходя только однажды через каждый мост. И тут же мне было сообщено, что никто еще до сих пор не мог это проделать, но никто и не доказал, что это невозможно... После долгих размышлений я нашел легкое правило, основанное на вполне убедительном доказательстве, с помощью которого можно во всех задачах такого рода тотчас же определить, может ли быть совершен такой обход через какое угодно число и как угодно расположенных мостов или не может». Кенигсбергские же мосты расположены так, что их можно представить в виде схемы (смотри рис. 1).

По поводу обнаруженного им способа решать задачи подобного рода Эйлер писал: «Это решение по своему характеру, по-видимому, имеет мало отношения к математике, и мне непонятно,

почему следует скорее от математика ожидать этого решения, нежели от какого-нибудь другого человека, ибо это решение подкрепляется одним только рассуждением, и нет необходимости привлекать для нахождения этого решения какие-либо законы, свойственные математике. Итак, я не знаю, каким образом получается, что вопросы, имеющие совсем мало отношения к математике, скорее разрешаются математиками, чем другими».

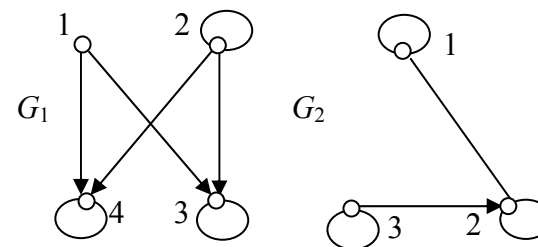
Так можно ли обойти Кенигсбергские мосты, проходя только один раз через каждый из этих мостов? Чтобы найти ответ, продолжим письмо Эйлера к Маринони: «Вопрос состоит в том, чтобы определить, можно ли обойти все эти семь мостов, проходя через каждый только однажды, или нельзя. Мое правило приводит к следующему решению этого вопроса. Прежде всего, нужно смотреть, сколько есть участков, разделенных водой, – таких, у которых нет другого перехода с одного на другой, кроме как через мост. В данном примере таких участков четыре – А, В, С, D. Далее нужно различать, является ли число мостов, ведущих к этим отдельным участкам, четным или нечетным. Так, в нашем случае к участку А ведут пять мостов, а к остальным – по три моста, т. е. Число мостов, ведущих к отдельным участкам, нечетно, а этого одного уже достаточно для решения задачи. Когда это определено, применяем следующее пра-

12.3.

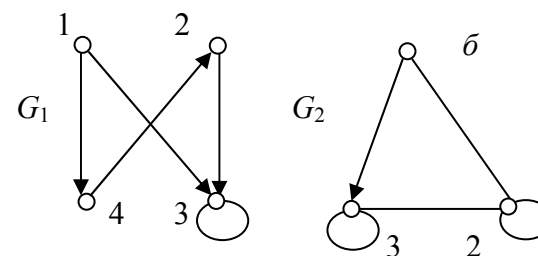


13. Даны графы G_1 и G_2 . Найдите $G_1 \hat{\bowtie} G_2$, $G_1 \hat{\bowtie} G_2$, $G_1 \hat{\bowtie} G_2$, $G_1 \times G_2$. Для графа $G_1 \hat{\bowtie} G_2$ найдите матрицы смежности, инцидентности, сильных компонент, маршрутов длины 2 и все маршруты длины 2, исходящие из вершины 1.

13.1.

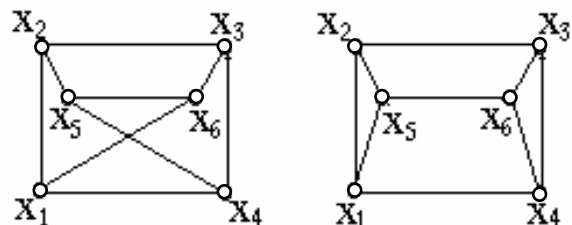


13.2.



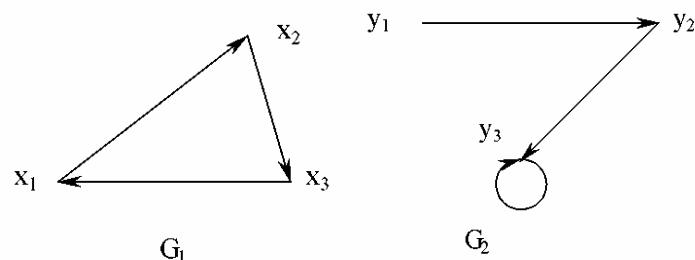
13.3.

11. Найти цикломатические и хроматические числа, числа внутренней и внешней устойчивости для графов. Изоморфны ли графы?

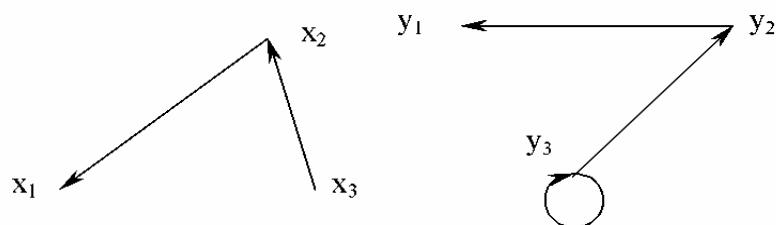


12. Найти декартово произведение графов.

12.1.



12.2.



вило: если бы число мостов, ведущих к каждому отдельному участку, было четным, то тогда обход, о котором идет речь, был бы возможен, и в то же время можно было бы начать этот обход с любого участка. Если же из этих чисел два были бы нечетные, ибо только одно быть нечетным не может, то и тогда мог бы совершиться переход, как это предписано, но только начало обхода непременно должно быть взято от одного из тех двух участков, к которым ведет нечетное число мостов. Если бы, наконец, было больше двух участков, к которым ведет нечетное число мостов, то тогда такое движение вообще невозможно... если можно было привести здесь другие, более серьезные задачи, этот метод мог бы принести еще большую пользу и им не следовало бы пренебрегать».

Обоснование вышеприведенного правила можно найти в письме Л. Эйлера к своему другу Элеру. Математик писал, что переход возможен, если на участке разветвления реки имеется не более двух областей, в которые ведет нечетное число мостов. Для того, чтобы проще представить себе это, будем стирать на рисунке уже пройденные мосты. Легко проверить, что если мы начнем двигаться в соответствии с правилами Эйлера, пересечем один мост и сотрем его, то на рисунке будет изображен участок, где опять имеется не более двух областей, в которые ведет нечетное число

мостов, а при наличии областей с нечетным числом мостов мы будем располагаться в одной из них. Продолжая двигаться так далее, пройдем через все мосты по одному разу.

В заключение отметим, что задача о Кенигсбергских мостах и подобные ей задачи вместе с совокупностью методов их исследования составляют очень важный в практическом отношении раздел математики, называемый теорией графов. Первая работа о графах принадлежала Л. Эйлеру и появилась в 1736 году. В дальнейшем над графами работали Кениг (1774-1833), Гамильтон (1805-1865), из современных математиков – К. Берж, О. Оре, А. Зыков.

Впоследствии теория графов стала использоваться в топологии, алгебре, теории чисел. В наше время теория графов находит применение в самых разнообразных областях науки, техники и практической деятельности. Она используется при проектировании электрических сетей, планировании транспортных перевозок, построении молекулярных схем. Применяется теория графов также в экономике, психологии, социологии, биологии.

Составить их матрицы смежности. Найти граф $G = (G_1 \hat{\cup} G_2) \hat{\cap} G_3$ и построить его диаграмму.

9. Даны графы своими матрицами смежности

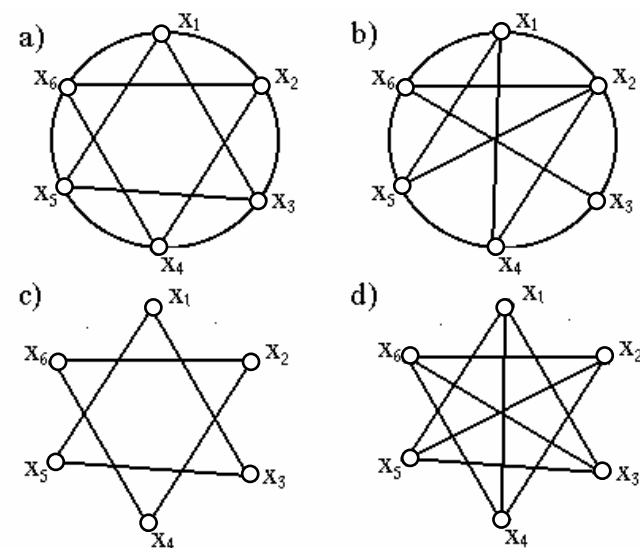
$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Найти матрицу смежности графа

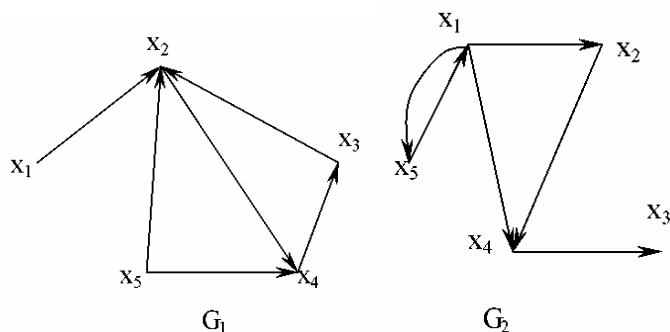
$$G = (G_1 \hat{\cup} G_3) \hat{\cap} (G_2 \hat{\cup} G_3)$$

и построить его диаграмму.

10. Для четырех графов найти: дополнение, числовые характеристики, объединение графов а и d, пересечение графов b и d, композицию графов c и d.



6. Даны два графа



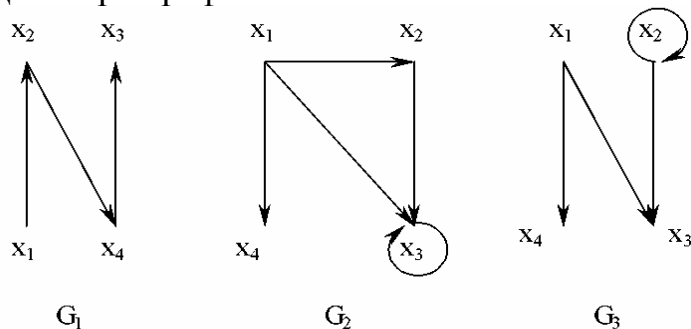
Произвести непосредственное сложение этих графов. Составить матрицы смежности и найти с их помощью пересечение графов.

7. Даны два графа своими матрицами смежности:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Составить матрицу смежности, соответствующую сумме и пересечению графов. Нарисовать диаграммы исходных и результирующих графов

8. Даны три графа:



168

1. Основные характеристики графов

1.1. Виды и способы задания графов

Определение 1.1. Графом $G(V, E)$ называется совокупность двух множеств – непустого множества V (множества *вершин*) и множества E его двухэлементных подмножеств множества V (E – множество *ребер*).

$$G(V, E) = \langle V; E \rangle, V \neq \emptyset, E \subset 2^V$$

Определение 1.2. Граф G – это математический объект, состоящий из множества *вершин* $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и множества *ребер* $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Таким образом, граф полностью определяется совокупностью множеств X, A : $G = (X, A)$.

Определение 1.3. Графом называется алгебраическая система $G = (M; R)$, где R – двухместный предикатный символ. Элементы носителя M называются *вершинами* графа G , а элементы бинарного отношения $R \subseteq M^2$ – *дугами*. Таким образом, дугами являются пары вершин $(a, b) \in R$. При этом дуга (a, b) называется *исходящей* из вершины a и *заходящей* в вершину b .

Для многих задач несущественно, являются ли ребра отрезками прямых или криволинейными дугами; важно лишь то, какие вершины соединяет каждое ребро.

Существуют два основных вида графов (и множество их подвидов): ориентированные и неориентированные.

Если ребрам графа приданы направления от одной вершины к другой, то такой граф называется *ориентированным*. Ребра ориентированного графа называются *дугами*. Соответствующие вершины ориентированного графа называют *началом* и *концом*. Если направления ребер не указываются, то граф называется *неориентированным* (или просто графом).

Теория графов многократно переоткрывалась разными авторами при решении различных прикладных задач. Например, задача о Кёнигсбергских мостах.

На рис. 1 представлен схематический план

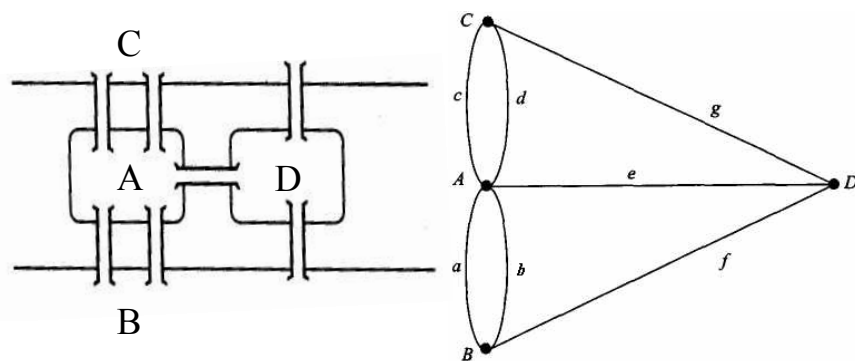
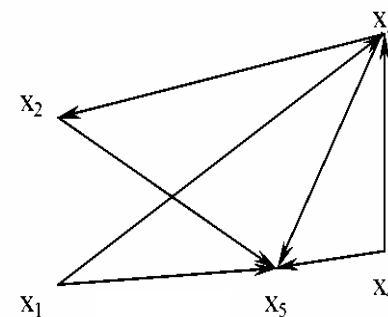
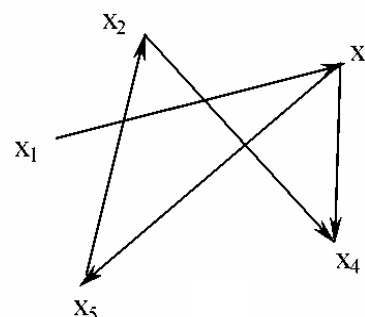


Рис. 1. Схематический план города и его представление в виде графа.

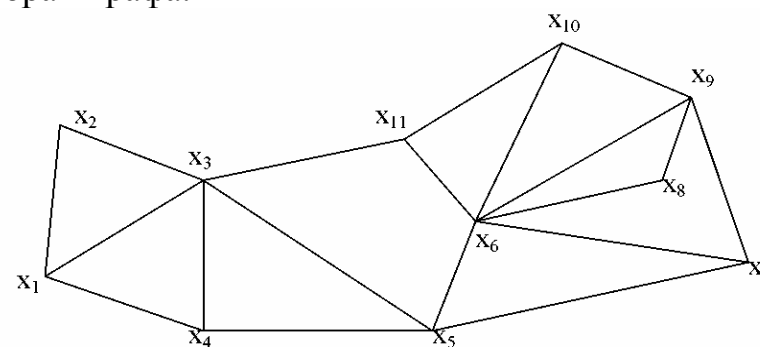
4.4.



4.5.



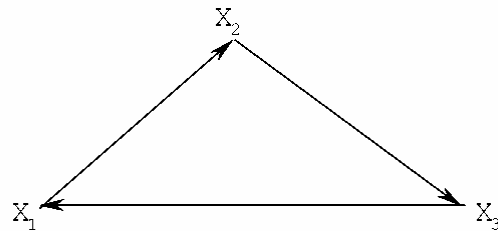
5. Определить минимальное число часовых, необходимых для охраны 11 объектов, расположенных в вершинах графа. Объекты просматриваются по ребрам графа.



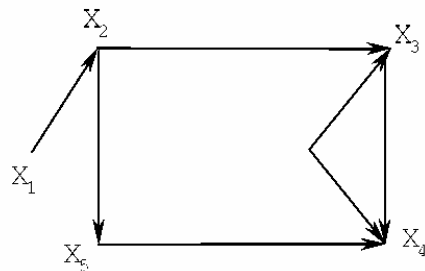
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \infty & 3 & 5 & 11 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 12 & 6 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 3 & \infty & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 9 & 8 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \infty & 6 & 3 & 10 & 7 \\ 6 & \infty & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & \infty & 5 & 6 \\ 10 & 2 & 5 & \infty & 3 \\ 7 & 3 & 6 & 3 & \infty \end{pmatrix}$$

4. Найти числа внутренней и внешней устойчивости для графов:

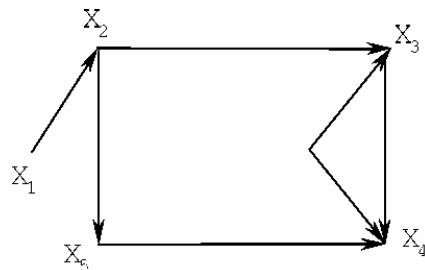
4.1.



4.2.



4.3.



центральной части города Кенигсберг (ныне Калининград), включающий два берега реки Преголи, два острова в ней и семь соединяющих их мостов. Задача состоит в том, чтобы обойти все четыре части суши, пройдя по каждому мосту один раз, и вернуться в исходную точку. Эта задача была решена (показано, что решения не существует) Эйлером в 1736 году.

Пример 1.1.

На рис. 2 изображен неориентированный граф $G = (X, A)$.

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\},$$

$$A = \{a_1 = (x_1, x_2), a_2 = (x_2, x_3),$$

$$a_3 = (x_1, x_3), a_4 = (x_3, x_4)\}.$$

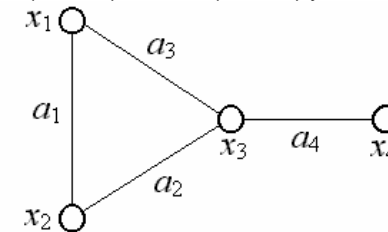


Рис. 2.

Пример 1.2.

На рис. 3 изображен ориентированный граф $G = (X, A)$.

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\},$$

$$A = \{a_1 = (x_1, x_2), a_2 = (x_1, x_3),$$

$$a_3 = (x_3, x_4), a_4 = (x_3, x_2)\}.$$

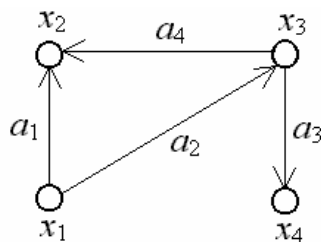


Рис. 3.

Определение 1.4. Граф называется *простым*, если каждую пару вершин соединяет не более чем одно ребро.

Определение 1.5. Граф, имеющий как ориентированные, так и неориентированные ребра, называется *смешанным*.

Различные ребра могут соединять одну и ту же пару вершин. Такие ребра называют *кратными*.

Определение 1.6. Граф, содержащий кратные ребра, называется *мультиграфом*.

Неориентированное ребро графа эквивалентно двум противоположно направленным дугам, соединяющим те же самые вершины.

Ребро может соединять вершину саму с собой. Такое ребро называется *петлей*.

Определение 1.7. Граф с кратными ребрами и петлями называется *псевдографом*.

Множество ребер графа может быть пустым. Множество вершин графа не может быть пустым.

Задачи для самостоятельного решения

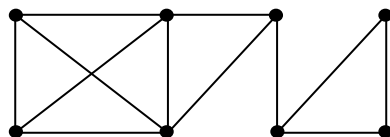
1. Описать граф, заданный матрицей смежности, используя как можно больше характеристик. Составить матрицу инцидентности и связности (сильной связности).
2. Пользуясь алгоритмом Форда-Беллмана, найти минимальный путь из x_1 в x_7 в ориентированном графе, заданном матрицей весов.
3. Пользуясь алгоритмом Краскала, найти минимальное остовное дерево для графа, заданного матрицей длин ребер.

Варианты заданий

- | | | |
|--|---|--|
| 1.1 | 1.2 | 1.3 |
| $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 12 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 13 & 7 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 5 & \infty & 3 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 10 & 9 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 11 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} \infty & 12 & 6 & 20 & 14 \\ 12 & \infty & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 2 & \infty & 10 & 12 \\ 20 & 4 & 10 & \infty & 6 \\ 14 & 6 & 12 & 6 & \infty \end{pmatrix}$ |
| 2.1 | 2.2 | 2.3 |
| $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} \infty & 1 & 3 & 9 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 10 & 4 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 5 & \infty & 1 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 7 & 6 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 8 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} \infty & 1 & \infty & 4 & 5 \\ 1 & \infty & 2 & \infty & 1 \\ \infty & 2 & \infty & 1 & 1 \\ 4 & \infty & 1 & \infty & 3 \\ 5 & 1 & 1 & 3 & \infty \end{pmatrix}$ |
| 3.1 | 3.2 | 3.3 |

рованного и соответственного ему неориентированного графов.

3. Найти матрицу расстояний, диаметр и радиус графа, определить центральные вершины.



4. Для графа, представленного следующей матрицей смежности, определите матрицу инцидентности графа и изобразите его графически

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Ориентированный граф с множеством вершин $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ задан списком дуг

$\{(1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 6), (2, 6), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (4, 6), (5, 2), (5, 4), (5, 4), (5, 5), (6, 2), (6, 5), (7, 1), (7, 6)\}$.

Построить реализацию графа, матрицу инцидентности и матрицу соседства вершин.

Пример 1.3.

На рис. 4. изображен ориентированный граф $G = (X, A)$.

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$,

$A = \emptyset$.



Рис. 4.

Как в случае ориентированного, так и в случае неориентированного ребра говорят, что вершины x и y *инцидентны* ребру a , если эти вершины соединены a .

Определение 1.8. Две вершины называются *смежными*, если они инцидентны одному и тому же ребру. Два ребра называются *смежными*, если они имеют общую вершину.

Определение 1.9. *Степенью* вершины графа называется число ребер, инцидентных этой вершине.

Вершина, имеющая степень 0, называется *изолированной*, а степень 1 – *висячей*.

Необходимость учитывать ориентацию ребер в орграфе приводит к расщеплению понятия «степень вершины» на две части: *полустепенью захода* вершины v_i ($d^-(v_i)$) называется число ребер, заходящих в v_i , *полустепенью исхода* v_i ($d^+(v_i)$) – число ребер, выходящих из нее.

Степень вершины обозначают через $\deg v_i$.
Для орграфа $\deg v_i = d^+(v_i) + d^-(v_i)$.

Определение 1.10. Граф, степени всех k вершин которого одинаковы, называется *однородным графом степени k* .

Определение 1.11. Дополнением данного графа называется граф, состоящий из всех ребер и их концов, которые необходимо добавить к исходному графу, чтобы получить полный граф.

Для ориентированного графа множество вершин, в которые ведут дуги, исходящие из вершины x , обозначают $G(x)$, то есть

$$G(x) = \{y: (x, y) \in G\}.$$

Множество $G(x)$ называют *образом* вершины x . Соответственно $G^{-1}(y)$ – множество вершин, из которых исходят дуги, ведущие в вершину y ,

$$G^{-1}(y) = \{x: (x, y) \in G\}.$$

Множество $G^{-1}(y)$ называют *прообразом* вершины y .

Пример 1.4.

В графе, изображенном на рис. 2, концами ребра a_1 являются вершины x_1, x_2 ; вершина x_2 инцидентна ребрам a_1, a_2 ; степень вершины x_3 равна 3; вершины x_1 и x_3 смежные; ребра a_1 и a_2 смежные; вершина x_4 висячая. В ориентированном графе, изображенном на рис. 3, началом дуги a_1 является вершина x_1 , а ее концом – вершина x_2 ; верши-

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Неориентированный граф G задан вершинами $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ и рёбрами

$$\{(1, 3); (1, 4); (1, 5); (1, 7); (2, 3); (2, 4); (2, 7); (3, 5); (3, 7); (4, 6); (4, 7); (5, 6); (6, 7)\}.$$

Построить реализацию графа, найти цикломатическое число и его остов.

Контрольная работа №2

1. Представить в виде ориентированного графа отношение

$$\rho = (V, E), V = \{2, 4, 16, 22\}, \\ E = \{(x, y) : (x + y) / 6\}.$$

2. Ориентированный граф G с множеством вершин $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ задан списком дуг

$$\{(1, 2), (1, 4), (1, 5), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (3, 4), (4, 2), (4, 5), (5, 5), (5, 7), (7, 1)\}.$$

Построить реализацию графа, матрицу инцидентности и матрицы соседства вершин для ориенти-

Типовые контрольные работы

Контрольная работа №1

1. Представить в виде ориентированного графа отношение

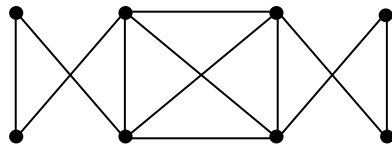
$$\rho = (V, E), V = \{2, 4, 16, 22\}, \\ E = \{(x, y) : x / y - \text{четно}\}.$$

2. Ориентированный граф G с множеством вершин $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ задан списком дуг

$$\{(1, 6), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 3), (3, 3), (3, 4), \\ (3, 6), (5, 1), (5, 6), (5, 6), (5, 6), (7, 4), (7, 6)\}.$$

Построить реализацию графа, матрицу инцидентности и матрицы соседства вершин для ориентированного и соответственного ему неориентированного графов.

3. Найти матрицу расстояний, диаметр и радиус графа, определить центральные вершины.



4. Для графа, представленного следующей матрицей смежности, определите матрицу инцидентности графа и изобразите его графически

на x_1 инцидентна дугам a_1 и a_2 ; $G(x_1) = \{x_2, x_3\}$, $G(x_2) = \emptyset$, $G^{-1}(x_3) = \{x_1\}$, $G^{-1}(x_1) = \emptyset$.

Определение 1.12. Подграфом графа G называется граф, все вершины и ребра которого содержатся среди вершин и ребер графа G . Подграф называется *собственным*, если он отличен от самого графа.

Определение 1.13. Граф $G = (X, A)$ – *полный*, если для любой пары вершин x_i и x_j существует ребро (x_i, x_j) .

Определение 1.14. Граф $G = (X, A)$ – *симметрический*, если для любой дуги (x_i, x_j) существует противоположно ориентированная дуга (x_j, x_i) .

Определение 1.15. Граф $G = (X, A)$ – *планарный*, если он может быть изображен на плоскости так, что не будет пересекающихся дуг.

Определение 1.16. Неориентированный граф $G = (X, A)$ – *двудольный*, если множество его вершин X можно разбить на два подмножества X_1 и X_2 , что каждое ребро имеет один конец в X_1 , а другой в X_2 .

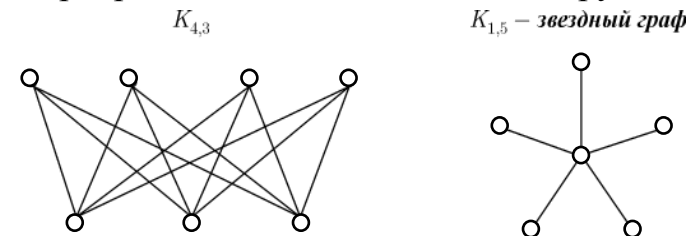


Рис. 5. Двудольные графы

Заметим, что граф $K_{m,n}$ имеет ровно $m + n$ вершин и $m \cdot n$ ребер.

1.2. Матричные способы задания графов

Для алгебраического задания графов используются матрицы смежности и инцидентности.

Определение 1.17. Матрица смежности $A = (a_{ij})$ определяется одинаково для ориентированного и неориентированного графов. Это квадратная матрица порядка n , где n – число вершин, у которой

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (x_i, x_j) \in A, \\ 0, & \text{если } (x_i, x_j) \notin A. \end{cases}$$

Пример 1.5.

Матрица смежности графа, изображенного на рис. 2, имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 1.6.

Матрица смежности ориентированного графа, изображенного на рис. 3, имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

32. Какая модель теории графов адекватна следующей задаче: Имеется сеть связи, соединяющая n узлов. Если выйдут из строя некоторые каналы, то связь между узлами может быть нарушена. Какие каналы можно удалить без нарушения связи? Какие каналы нужно удалить, чтобы связь не нарушалась, а общая стоимость всех каналов была минимальной?

33. Какая модель теории графов адекватна следующей задаче: Разрабатывается проект газопровода, соединяющего буровые скважины в Мексиканском заливе с находящейся на берегу приемной станцией. Следует выбрать проект, в котором строительство газопровода имеет минимальную стоимость.

34. Какая модель теории графов адекватна следующей задаче: Пусть имеется n изолированных городов. Какое минимальное количество дорог между некоторыми городами надо построить, чтобы иметь возможность попасть из любого города в любой другой? Если заданы расстояния между городами, то как выбрать сеть дорог с минимальной общей длиной?

26. Постройте дерево наименьшей общей длины, ребра которого соединяют вершины правильного шестиугольника.

27. Сколько компонент связности может иметь дерево?

28. Можно ли построить дерево, все вершины которого имеют степень больше, чем единица?

29. Какая модель теории графов адекватна следующей задаче: Различные организации x_1, \dots, x_n обмениваются некоторой информацией (при этом связи могут быть направленными). Если между организациями x_i и x_j возможен непосредственный обмен информацией, то затраты на него составляют r_{ij} рублей. Возможен ли обмен информацией между двумя организациями? Если возможен, то как осуществить этот обмен с наименьшими затратами?

30. Какая модель теории графов адекватна следующей задаче: Имеется схема городских дорог с перекрестками и, возможно, односторонним движением. Необходимо найти маршрут, соединяющий две точки на карте. Как найти такой маршрут при условии, что его длина минимальна?

31. Какая модель теории графов адекватна следующей задаче: Требуется построить схему электрической сети, в которой клеммы должны быть соединены с помощью проводов наименьшей общей длины.

Матрица смежности полностью задает граф.

Определение 1.18. Матрицей инцидентности $B = (b_{ij})$ ориентированного графа называется прямоугольная матрица $(n \times m)$, где n – число вершин, m – число ребер, у которой

$$b_i = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } x_i \text{ является началом дуги } a_j; \\ -1, & \text{если вершина } x_i \text{ является концом дуги } a_j; \\ 0, & \text{если вершина } x_i \text{ не инцидентна дуге } a_j; \end{cases}$$

Для неориентированного графа матрица инцидентности B задается следующим образом:

$$b_i = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } x_i \text{ инцидентна ребру } a_j; \\ 0, & \text{если вершина } x_i \text{ не инцидентна ребру } a_j. \end{cases}$$

Пример 1.7.

Матрица инцидентности графа, изображенного на рис. 2, имеет вид:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 1.8.

Матрица инцидентности ориентированного графа, изображенного на рис. 3, имеет вид:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица инцидентности, так же, как и матрица смежности, полностью задает граф.

Матрицы смежности и инцидентности удобны для задания графов на ЭВМ.

Основные свойства матриц смежности и инцидентности

1. Матрица смежности неориентированного графа является симметричной. Для ориентированного графа это, вообще говоря, неверно.
2. Сумма элементов i – ой строки или i –го столбца матрицы смежности неориентированного графа равна степени вершины x_i .
3. Сумма элементов i – ой строки матрицы смежности ориентированного графа равна числу дуг, исходящих из x_i .
4. Сумма элементов i – го столбца матрицы смежности ориентированного графа равна числу дуг, входящих в вершину x_i .
5. Сумма строк матрицы инцидентности ориентированного графа является нулевой строкой.

в) матрице расстояний;

г) матрице связности?

18. Может ли число компонент связности графа превосходить число его вершин?

19. Верно или неверно утверждение, что в ориентированном графе с контурами минимальный путь может содержать контуры?

20. Как называется связный граф без циклов?

21. Пусть n – число вершин, а m – число ребер в связном графе без циклов. Какие из следующих соотношений возможны:

а) $n = m$; б) $n < m$;

в) $n \leq m$;

г) $n > m$;

д) $n \geq m$?

22. Сколько ребер имеет связный граф без циклов с n вершинами?

23. Чему равно наименьшее и наибольшее число ребер в связном графе без петель и кратных ребер с n вершинами?

24. Чему равно наименьшее и наибольшее число ребер в графе без петель и кратных ребер с n вершинами?

25. Верно или неверно следующее утверждение: Минимальное остовное дерево может содержать циклы?

11. Какие из следующих утверждений являются правильными:

- а) если матрица смежности несимметричная, то граф ориентированный;
- б) если граф неориентированный, то матрица смежности симметричная;
- в) если диагональные элементы матрицы смежности – нули, то граф неориентированный?

12. Может ли вершина, входящая в цикл графа, иметь степень, меньшую двух?

13. Как называется путь, у которого начало первой дуги совпадает с концом последней?

14. Как называется маршрут, у которого первая вершина совпадает с последней?

15. Можно ли утверждать, что сильно связный граф всегда содержит контур?

16. Какие из следующих матриц полностью задают граф:

- а) матрица инцидентности;
- б) матрица односторонней связности;
- в) матрица связности;
- г) матрица сильной связности;
- д) матрица смежности?

17. По какой матрице можно без дополнительных вычислений определить число компонент связности неориентированного графа:

- а) матрице смежности;
- б) матрице инцидентций;

Возможны следующие различные способы задания графа:

- а) посредством графического изображения;
- б) указанием множества вершин и множества ребер (дуг);
- в) матрицей смежности;
- г) матрицей инцидентности.

1.3. Изоморфизм графов

Определение 1.19. Графы $G_1 = (X_1, A_1)$ и $G_2 = (X_2, A_2)$ *изоморфны*, если существует взаимно однозначное соответствие между множествами вершин X_1 и X_2 , такое, что любые две вершины одного графа соединены тогда и только тогда, когда соответствующие вершины соединены в другом графе.

Пример 1.9.

Графы, изображенные на рис. 6 являются изоморфными.

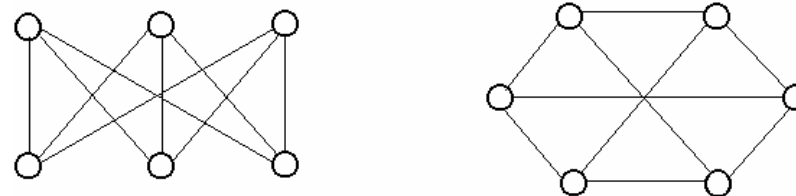


Рис. 6.

Пример 1.10.

Покажем, что следующие два графа изоморфны.

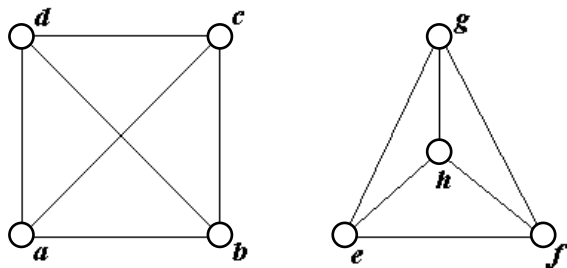


Рис. 7.

Действительно, на рис. 7 отображение

$$a \rightarrow e, b \rightarrow f, c \rightarrow g, d \rightarrow h,$$

являющееся изоморфизмом, легко представить как модификацию первого графа, передвигающую вершину d в центр рисунка.

Изоморфные графы отличаются только нумерацией вершин. Матрицы смежности двух изоморфных графов могут быть получены одна из другой перестановкой строк и столбцов. Чтобы узнать, являются ли два графа изоморфными, нужно произвести все возможные перестановки строк и столбцов матрицы смежности одного из графов. Если после какой-нибудь перестановки получится матрица смежности второго графа, то эти графы изоморфны. Чтобы убедиться, что графы неизоморфны, надо выполнить все $n!$ возможных перестановок строк и столбцов.

Контрольные вопросы

1. Какое из двух утверждений верно:
 - а) ориентированный граф является частным случаем неориентированного графа;
 - б) неориентированный граф является частным случаем ориентированного графа?
2. Перечислите все возможные способы задания графов.
3. Что характеризует сумма элементов столбца матрицы смежности неориентированного графа?
4. Что характеризует сумма элементов строки матрицы смежности неориентированного графа?
5. Что характеризует сумма элементов столбца матрицы смежности ориентированного графа?
6. Что характеризует сумма элементов строки матрицы смежности ориентированного графа?
7. Всегда ли матрица смежности симметрична относительно главной диагонали?
8. Как по матрице смежности определить число ребер неориентированного графа?
9. Как по матрице инцидентности, не рисуя граф, определить его матрицу смежности?
10. Может ли матрица $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ быть матрицей смежности неориентированного графа?

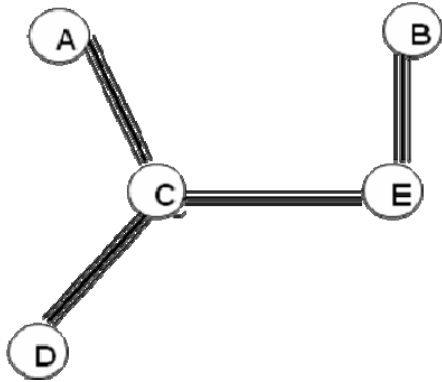


Рис. 6.3.

Описанный алгоритм относится к категории «жадных»: на каждом шаге мы выбираем самое дешевое продолжение пути.

1.4. Маршруты, циклы в неориентированном графе

Пусть G – неориентированный граф.

Определение 1.20. *Маршрутом* или *цепью* в G называется такая последовательность (конечная или бесконечная) ребер $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, что каждые соседние два ребра a_i и a_{i+1} имеют общую инцидентную вершину.

Одно и то же ребро может встречаться в маршруте несколько раз. В конечном маршруте (a_1, a_2, \dots, a_n) имеется первое ребро a_1 и последнее ребро a_n . Вершина x_1 , инцидентная ребру a_1 , но не инцидентная ребру a_2 , называется началом маршрута, а вершина x_n , инцидентная ребру a_n , но не инцидентная ребру a_{n-1} , называется концом маршрута.

Определение 1.21. *Длиной* (или *мощностью*) маршрута называется число ребер, входящих в маршрут, причем каждое ребро считается столько раз, сколько оно входит в данный маршрут.

Замкнутый маршрут называется *циклом*.

Пример 1.11.

В изображенном на рис. 8 графе рассмотрим два маршрута из вершины x_1 в вершину x_4 :

$M_1 = (a_1, a_2, a_4)$ и $M_2 = (a_1, a_2, a_5, a_6)$.

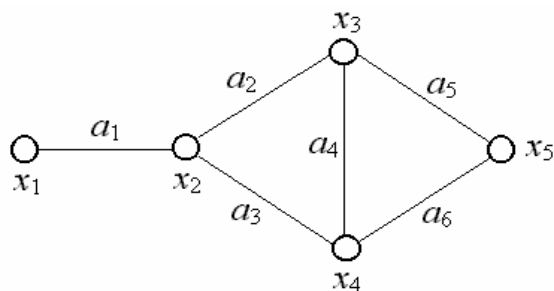


Рис. 8.

Длина маршрута M_1 равна 3, а длина маршрута M_2 равна 4.

Определение 1.22. Маршрут (цикл), в котором все ребра различны, называется *простой цепью* (циклом). Маршрут (цикл), в котором все вершины, кроме первой и последней, различны, называется *элементарной цепью* (циклом).

Пример 1.12.

В приведенном на рис. 9 графе выделим следующие маршруты:

- (a_1, a_3, a_4) – простая элементарная цепь длины 3, т.к. все ребра и вершины попарно различны;
- (a_2, a_4, a_3) – простой элементарный цикл, т.к. это замкнутый маршрут, у которого все ребра и вершины, кроме первой и последней, различны;
- (a_1, a_2, a_4, a_3) – цепь, которая является простой, но не элементарной, т.к. все ребра различны, но вершина x_2 встречается дважды;

	A	B	C	D	E
A		1,5	1	2	2,5
B	1,5		1,2	3	0,8
C	1	1,2		1,1	0,9
D	2	3	1,1		2,7
E	2,5	0,8	0,9	2,7	

Сначала строим ту дорогу, которая имеет наименьшую стоимость. В нашем случае это маршрут В – Е. теперь найдем самую дешевую линию, соединяющую город В или Е с каким то из остальных городов. Это путь между Е и С. Включаем его в схему. Далее поступаем аналогично – ищем самый дешевый из путей, соединяющих один из городов В, С, Е с одним из оставшихся – А или D. Дешевле всего соединить его с С. Получим сеть, изображенную на рисунке 6.3.

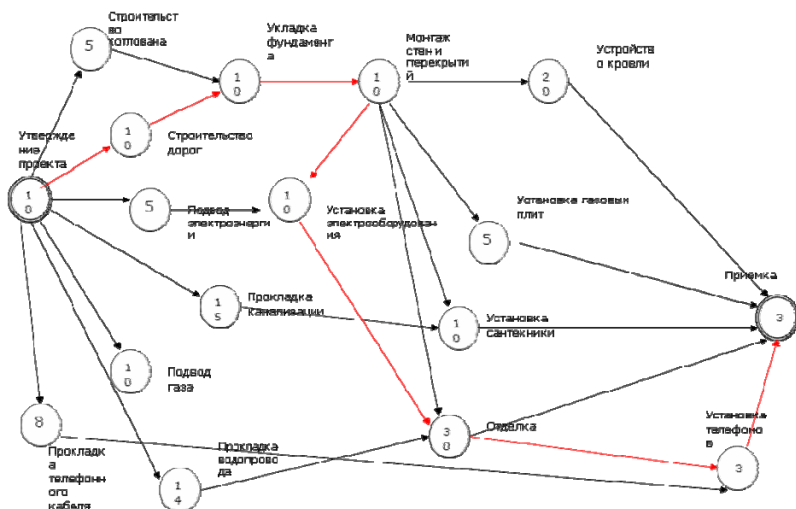


Рис. 6.2.

Железные дороги

Предполагается проложить железную дорогу, которая соединит несколько крупных городов. Для любой пары городов известна стоимость прокладки пути между ними. Требуется найти наиболее дешевый вариант строительства.

Интересно, что алгоритм нахождения оптимального варианта строительства довольно прост (чего нельзя сказать о других задачах теории графов).

Продemonстрируем его на примере дороги, соединяющей пять городов: А, В, С, D и Е. Стоимость прокладки пути между каждой парой городов указана в таблице 6.1.

Таблица 6.1.

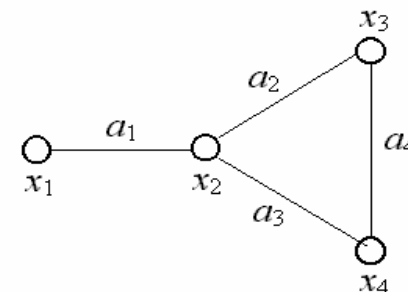


Рис. 9.

(a_1, a_2, a_2) – маршрут длины 3, не являющийся ни простой, ни элементарной цепью, т.к. ребро a_2 и вершина x_2 встречаются дважды.

Граф, в котором найдется маршрут, начинающийся и заканчивающийся в одной вершине, и проходящий по всем ребрам графа ровно один раз, называется *эйлеровым графом*.

1.5. Пути, контуры в ориентированном графе

Понятия пути, контура в ориентированном графе аналогичны понятиям маршрута, цикла в неориентированном графе.

Определение 1.23. *Путем* ориентированного графа называется последовательность дуг, в которой конечная вершина всякой дуги, отличной от последней, является начальной вершиной следующей дуги.

Определение 1.24. Число дуг пути называется *длиной* пути.

Определение 1.25. Путь называется *контуром*, если его начальная вершина совпадает с конечной вершиной.

Определение 1.26. Путь (контур), в котором все дуги различны, называется *простым*.

Определение 1.27. Путь (контур), в котором все вершины, кроме первой и последней, различны, называется *элементарным*.

Следует усвоить, что понятиям ребра, маршрута, цепи, цикла в неориентированном графе соответствуют понятия дуги, пути, ориентированной цепи, контура в ориентированном графе. Для лучшего запоминания приведем эти термины в таблице 1.1.

Таблица 1.1.

Неориентированный граф	Ориентированный граф
ребро	дуга
маршрут	путь
цикл	контур

Пример 1.13.

В приведенном на рис. 10. графе выделим следующие пути:

(x_1, x_2, x_3, x_4) – простой элементарный путь, т.к. каждая вершина и каждая дуга используются не более одного раза;

Теория графов находит применение в различных областях современной математики и ее многочисленных приложений, в особенности это относится к экономике, например, когда надо выбрать наилучшие варианты развозки товаров по магазинам, строительных материалов. При составлении больших проектов, содержащих различные виды работ, часто возникает ситуация, когда ту или иную работу можно начать лишь по окончании других. Так, при строительстве дома нельзя приступить к отделочным работам, пока не возведены стены, и нельзя возводить стены до укладки фундамента. Последовательность работ изображается в виде сетевых графиков. Они применяются при планировании деятельности предприятия.

Например, зная дату начала строительства и время, необходимое для выполнения каждой работы, можно выяснить, к какому сроку следует подвезти материалы или пригласить бригады специалистов: плотников, маляров, электриков и т. д.

Сетевые графики используют не только строители, но и конструкторы машин с большим количеством узлов и деталей, диспетчеры железных дорог и многие другие специалисты.

Рассмотрим применение графа в строительстве (рис. 6.2).

времени каждая бактерия либо делится на две новые, либо погибает. Тогда для потомства одной бактерии мы получим двоичное дерево.

Нас будет интересовать лишь один вопрос: в скольких случаях n -е поколение одной бактерии насчитывает ровно k потомков? Рекуррентное соотношение, обозначающее число необходимых случаев, известно в биологии под названием процесса Гальтона-Ватсона. Его можно рассматривать как частный случай многих общих формул.

6.4. Графы и физика

Еще недавно одной из наиболее сложных и утомительных задач для радиолюбителей было конструирование печатных схем.

Печатной схемой называют пластинку из какого-либо диэлектрика (изолирующего материала), на которой в виде металлических полосок вытравлены дорожки. Пересекаться дорожки могут только в определенных точках, куда устанавливаются необходимые элементы (диоды, триоды, резисторы и другие), их пересечение в других местах вызовет замыкание электрической цепи.

В ходе решения этой задачи необходимо вычертить плоский граф, с вершинами в указанных точках.

6.5. Графы и экономика

$(x_2, x_5, x_6, x_7, x_2)$ — простой элементарный контур, т.к. это замкнутый путь, в котором все дуги и вершины, кроме первой и последней, различны.

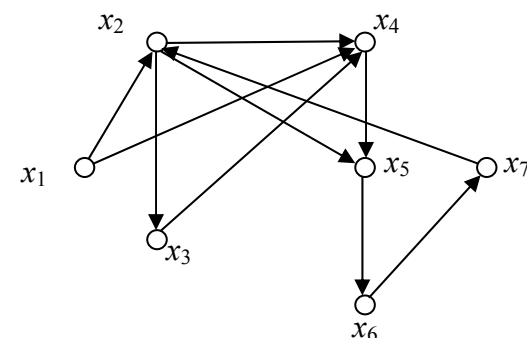


Рис. 10.

1.6. Связность графа

Определение 1.28. Неориентированный граф называется *связным*, если каждая пара различных вершин может быть соединена, по крайней мере, одной цепью.

Определение 1.29. Ориентированный граф называется *сильно связным*, если для любых двух его вершин x_i и x_j существует хотя бы один путь, соединяющий x_i с x_j .

Определение 1.30. Ориентированный граф называется *односторонне связным*, если для любых двух его вершин, по крайней мере, одна достижима из другой.

Определение 1.31. Компонентой связности неориентированного графа называется его связный подграф, не являющийся собственным подграфом никакого другого связного подграфа данного графа (максимально связный подграф).

Определение 1.32. Компонентой сильной связности ориентированного графа называется его сильно связный подграф, не являющийся собственным подграфом никакого другого сильно связного подграфа данного графа (максимально сильно связный подграф).

Определение 1.33. Компонентой односторонней связности неориентированного графа называется его односторонне связный подграф, не являющийся собственным подграфом никакого другого односторонне связного подграфа данного графа (максимально односторонне связный подграф).

Пусть $G = (X, A)$ неориентированный граф с множеством вершин $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Квадратная матрица $S = (s_{ij})$ порядка n , у которой

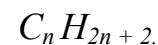
$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершины } x_i \text{ и } x_j \text{ принадлежат} \\ & \text{одной компоненте связности,} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

называется *матрицей связности* графа G .

Для ориентированного графа квадратная матрица $T = (t_{ij})$ порядка n , у которой

В построенном графе можно перейти по ребрам от любой вершины к любой другой, и в нем нет циклов. Такой граф называется деревом.

Пусть молекула содержит n атомов углерода и m атомов водорода, тогда граф будет содержать $n + m$ вершин. Далее воспользуемся соотношением: в дереве число ребер на единицу меньше числа вершин. Следовательно, в графе $n + m - 1$ ребер. Из вершин графа, обозначающих атомы углерода, выходит по 4 ребра, а из вершин, обозначающих атомы водорода, – одно. Используя простой факт, что сумма степеней вершин, то есть сумма числа ребер, выходящих из вершин, равна удвоенному числу ребер (это утверждение очевидно, поскольку каждое ребро соединяет ровно 2 вершины, и называется леммой о рукопожатиях), можно написать соотношения: $4n + m = 2(n + m - 1)$. Отсюда получаем, что $m = 2n + 2$. Следовательно, формула насыщенного углеводорода, имеющего n атомов углерода:



6.3. Графы и биология

Деревья играют большую роль в биологической теории ветвящихся процессов. Для простоты мы рассмотрим только одну разновидность ветвящихся процессов – размножение бактерий. Предположим, что через определенный промежуток

Найдите формулу насыщенного углеводорода, содержащего n атомов углерода.

Рассмотрим граф, в котором вершинами являются атомы, а ребрами – соответствующие валентные связи между ними. Покажем от противного, что в графе не существует цикла, то есть возможности, переходя по ребрам графа из вершины в вершину, вернуться в исходную вершину. Если цикл есть, то должен быть составлен из атомов углерода, поскольку водород имеет валентность 1 и может соединяться только с одним атомом. В случае существования цикла разорвем связь между двумя атомами углерода и присоединим к каждому из них еще по атому водорода. Число атомов водорода увеличится, значит, исходный граф описывал не молекулу насыщенного углеводорода.

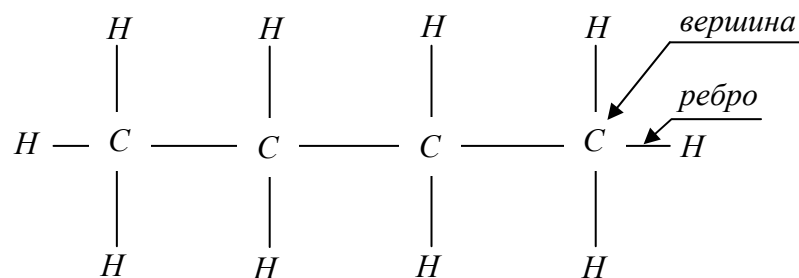


Рис. 6.1.

$$t_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если существует путь из } x_i \text{ в } x_j, \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

называется *матрицей односторонней связности (достижимости)*.

Квадратная матрица $S = (s_{ij})$ порядка n , у которой

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если существует путь из } x_i \\ & \text{в } x_j \text{ и из } x_j \text{ в } x_i, \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

называется *матрицей сильной связности*.

Пример 1.14.

У неориентированного графа, изображенного на рис. 11 две компоненты связности. Первая компонента связности включает вершины x_1, x_2, x_4, x_5 , а вторая состоит из одной вершины x_3 .

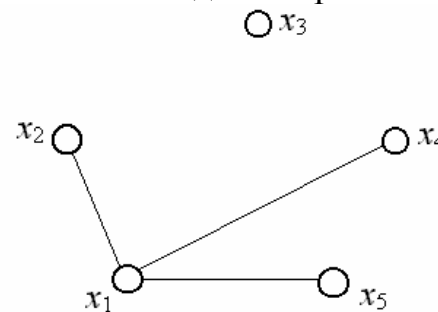


Рис. 11.

Матрица связности этого графа имеет вид:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Мы видим, что 1 – ая, 2 – ая, 4 – ая и 5 – ая строки матрицы S одинаковы.

Пример 1.15.

У ориентированного графа, изображенного на рис. 12 две компоненты сильной связности. Первая компонента связности включает вершины x_1, x_2, x_3, x_5 , а вторая состоит из одной вершины x_4 . Действительно, для любой пары вершин из множества $\{x_1, x_2, x_3, x_5\}$ существует хотя бы один путь, соединяющий эти вершины. Например, путь $(x_1, x_2, x_5, x_3, x_1)$ соединяет все эти вершины. Из вершины x_4 нет пути ни в одну вершину графа.

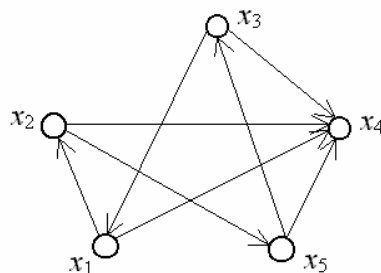


Рис. 12.

6.2. Графы и химия

Еще А. Кэли рассмотрел задачу о возможных структурах насыщенных (или предельных) углеводов, молекулы которых задаются формулой:

$$C_n H_{2n+2}$$

Все атомы углевода четырехвалентны, все атомы водорода одновалентны.

Молекула каждого предельного углевода представляет собой дерево. Если удалить все атомы водорода, то оставшиеся атомы углевода также будут образовывать дерево, каждая вершина которого имеет степень не выше 4. Следовательно, число возможных структур предельных углеводов, т.е. число гомологов данного вещества, равно числу деревьев с вершинами степени не больше четырех.

Таким образом, подсчет числа гомологов предельных углеводов также приводит к задаче о перечислении деревьев определенного типа. Эту задачу и ее обобщения рассмотрел Д. Пойа.

Приведем следующий пример.

Насыщенным углеводородом называется соединение атома углерода C , имеющего валентность 4, и водорода H , имеющего валентность 1, в котором при заданном числе атомов углерода содержится наибольшее число атомов водорода.

6. Применение теории графов

6.1. Графы и информация

Двоичные деревья играют весьма важную роль в теории информации. Предположим, что определенное число сообщений требуется закодировать в виде конечных последовательностей различной длины, состоящих из нулей и единиц. Если вероятности кодовых слов заданы, то наилучшим считается код, в котором средняя длина слов минимальна по сравнению с прочими распределениями вероятности. Задачу о построении такого оптимального кода позволяет решить алгоритм Хаффмана.

Двоичные кодовые деревья допускают интерпретацию в рамках теории поиска. Каждой вершине при этом сопоставляется вопрос, ответить на который можно либо «да», либо «нет». Утвердительному и отрицательному ответу соответствуют два ребра, выходящие из вершины. «Опрос» завершается, когда удастся установить то, что требовалось.

Таким образом, если кому-то понадобится взять интервью у различных людей, и ответ на очередной вопрос будет зависеть от заранее неизвестного ответа на предыдущий вопрос, то план такого интервью можно представить в виде двоичного дерева.

Матрица сильной связности этого графа имеет вид:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Мы видим, что 1 – ая, 2 – ая, 3 – ая и 5 – ая строки матрицы S одинаковы.

1.7. Пути во взвешенных ориентированных графах

Определение 1.34. Ориентированный граф называется *нагруженным*, если дугам этого графа поставлены в соответствие веса, так что дуге (x_i, x_j) сопоставлено некоторое число $c(x_i, x_j) = c_{ij}$, называемое *длиной* (или *весом*, или *стоимостью*) дуги.

Определение 1.35. *Длиной* (или *весом* или *стоимостью*) пути s , состоящего из некоторой последовательности дуг (x_i, x_j) , называется число $l(s)$, равное сумме длин дуг, входящих в этот путь, т.е.

$$l(s) = \sum c_{ij},$$

причем суммирование ведется по всем дугам $(x_i, x_j) \in s$. Матрица $C = (c_{ij})$ называется *матрицей длин дуг* или *матрицей весов*.

Определение 1.36. Четверка (M, R, f, g) называется помеченным графом, где пара функций f, g – пометка или распределение меток графа $G = (M, R)$ и
 $f: M \rightarrow S_M$ (распределение меток вершин),
 $g: R \rightarrow S_R$ (распределение меток дуг).

Для вершины $a \in M$ элемент $f(a)$ называется весом вершины a , для дуги $u \in R$ элемент $g(u)$ – весом дуги u .

Пример 1.16.

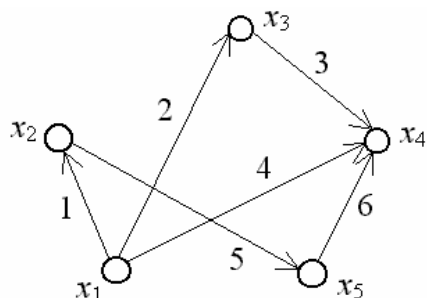


Рис. 13.

Для графа, изображенного на рис. 13, матрица C имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 1 & 2 & 4 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 3 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 6 & \infty \end{pmatrix}$$

Длина пути (x_1, x_2, x_5, x_4) равна $1 + 5 + 6 = 12$.

тельно пересечет одну из дуг. В доказательстве есть элементы интуитивности. Строгость достигается, если пользоваться *теоремой Жордана*: Пусть K – непрерывная замкнутая линия на плоскости. Линия K делит плоскость на внешнюю и внутреннюю области так, что любая непрерывная кривая, соединяющая любую точку внутренней области с некоторой точкой внешней области, пересекает K .

Другое доказательство основано на следующей теореме Л.Эйлера (1752), справедливой для любого конечного плоского связанного графа:

$b + r = p + 2$, где b – порядок графа, p – число его ребер и r – число его граней.

В графе $b = 6$, $p = 9$. Если бы граф был бы плоским, то $r = 11 - 6 = 5$. Обозначим через e_k – число k -угольных граней графа. Тогда

$$r = e_2 + e_3 + \dots,$$

$$2p = 2e_2 + 3e_3 + \dots,$$

так как каждое ребро принадлежит двум граням. Следовательно,

$$5 = e_2 + e_3 + \dots,$$

$$2p = 18 = 2e_2 + 3e_3 + \dots,$$

Так как $e_2 = e_3 = 0$, то

$$5 = e_4 + e_5 + \dots,$$

$$18 = 4e_4 + 5e_5 + 6e_6 + \dots,$$

$$20 = 4e_4 + 4e_5 + 4e_6 + \dots$$

Откуда следует, что $18 > 20$. Получили противоречие.

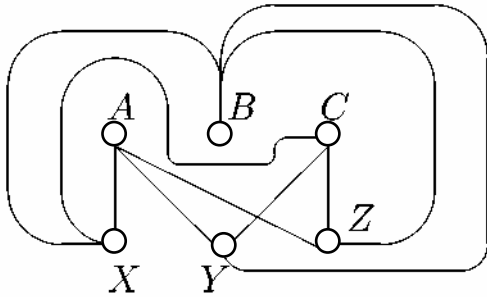


Рис. 5.20.

Предположим, что граф допускает плоскую реализацию. Начертим на плоскости непересекающиеся ребра AX , BX , UB , VC , CZ , ZA (рис. 5.21):

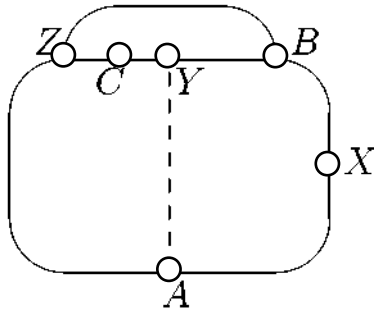


Рис. 5.21.

Можно считать, что полученный замкнутый контур описывается непрерывной кривой. Проводя непересекающиеся непрерывные линии AU и BZ , можно считать, что одна из них лежит внутри контура, а вторая – вне его. Но тогда дуга CX обяза-

Пример 1.17.

Пусть $M = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$,
 $R = [a_1, a_2] \hat{\cup} [a_2, a_3] \hat{\cup} [a_1, a_4] \hat{\cup} [a_2, a_4]$,
 $f: M \rightarrow C$,

где C – множество городов,

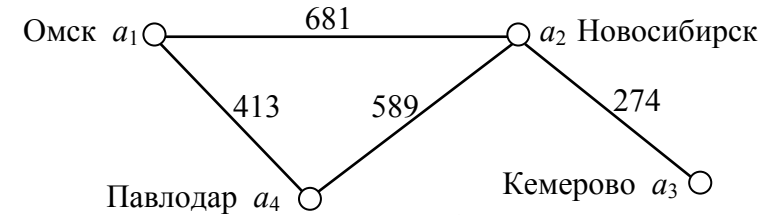


Рис. 14.

$g: R \rightarrow \omega$,
 $f(a_1) = \text{Омск}$,
 $f(a_2) = \text{Новосибирск}$,
 $f(a_3) = \text{Кемерово}$,
 $f(a_4) = \text{Павлодар}$,
 $g([a_1, a_2]) = 681$,
 $g([a_2, a_3]) = 274$,
 $g([a_1, a_4]) = 413$,
 $g([a_2, a_4]) = 589$.

Помеченный граф (M, R, f, g) изображен на рис. 14 и представляет собой схему автомобильных дорог с указанием их протяженности.

Информацию о весах дуг во взвешенном графе можно представлять в виде *матрицы весов* $W = (w_{ij})$, где w_{ij} – вес дуги (a_i, a_j) , если дуга (a_i, a_j)

существует, а для несуществующих дуг веса обычно помечают нулем или знаком ∞ в зависимости от приложений. Матрица весов имеет вид

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 681 & \infty & 413 \\ 681 & 0 & 274 & 589 \\ \infty & 274 & 0 & \infty \\ 413 & 589 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

Если граф $G = (M, R)$ является *разреженным*, т. е. число дуг R достаточно мало по сравнению с числом вершин M , то более эффективным, чем с помощью матрицы смежности, является представление дуг графа посредством *списка дуг*. Этот список задается двумя наборами $\bar{m} = (m_1, m_2, \dots, m_R)$ и $\bar{n} = (n_1, n_2, \dots, n_R)$, где (a_{mi}, a_{ni}) — i -я дуга графа G .

Пример 1.18.

Орграф, изображенный на рис. 15, представляется следующим списком дуг:

$$\bar{m} = (1, 1, 2, 3, 4, 4),$$

$$\bar{n} = (1, 2, 3, 4, 3, 4).$$

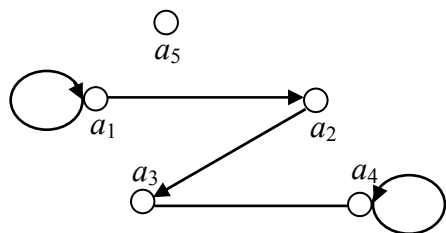


Рис. 15.

Рис. 5.19.

На участке земли были построены три дома A, B, C и вырыты три колодца X, Y, Z . От каждого из домов имела тропка к каждому из трех колодцев (рис 5.19). Спустя некоторое время обитатели домов A, B, C поссорились друг с другом и решили проложить дорожки к колодцам X, Y, Z так, чтобы по пути к колодцам им не приходилось встречаться друг с другом. Спрашивается, можно ли это сделать?

Решение.

Попытки решить эту задачу приводят к убеждению, что это невозможно, хотя число точек пересечения ребер можно свести к 1 (рис. 5.20):

крыты на ремонт. Докажите, что из любого города можно проехать в любой другой по оставшимся дорогам.

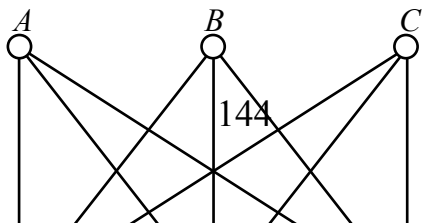
Решение.

Пусть A и B – данные города. Докажем сначала, что из A в B можно было проехать до закрытия на ремонт двух дорог. Рассмотрим для этого проекцию многогранника на некоторую прямую, не перпендикулярную ни одному из его ребер (при такой проекции вершины многогранника не сливаются).

Пусть A' и B' – проекции точек A и B , а M' и N' – крайние точки проекции многогранника (в точки M' и N' проецируются вершины M и N). Если идти из вершины A так, что в проекции движение будет происходить по направлению от M' к N' , то, в конце концов, мы обязательно попадем в вершину N . Аналогично из вершины B можно пройти в N . Таким образом, можно проехать из A в B (через N).

Если полученный путь из A и B проходит через закрытую дорогу, то есть еще два объезда по граням, для которых это ребро является общим. Вторая закрытая дорога не может находиться сразу на двух этих объездах. Значит, из города A в город B можно проехать, по крайней мере, одним путем.

Задача 5.18. (о трех домах и трех колодцах)



Для представления рассматриваемого графа матрицей смежности требуется $5^2 = 25$ элементов, а списком дуг – только $6 \cdot 2 = 12$ элементов.

Другим представлением графа, удобным при работе с графами, в которых удаляются или добавляются вершины, является *структура смежности*, получаемая составлением для каждой вершины a списка номеров ее *последователей*, т. е. номеров вершин b , для которых имеется дуга (a, b) .

Пример 1.19.

Орграф, изображенный на рис. 15, представляется следующей структурой смежности:

Вершины	Списки последователей
1:	1, 2
2:	3
3:	4
4:	3, 4
5:	

Для ненагруженного графа введем понятие *кратчайшего пути*. Это путь с минимальным общим числом дуг, причем каждая дуга считается столько раз, сколько она содержится в этом пути.

Для нахождения минимального пути между двумя произвольными вершинами для случая, когда все $c_{ij} \geq 0$ можно воспользоваться простым алгоритмом Дейкстры.

Алгоритм Дейкстры

Пусть граф $G = (M, R)$ – взвешенный граф, $W = (w_{ij})$ – матрица весов графа G , где $w_{ij} > 0$; a_i – выделенный источник. Зададим строку $D^{(1)} = (d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \dots, d_n^{(1)})$, полагая, что $d_i^{(1)} = 0$, $d_j^{(1)} = w_{ij}$, $i \neq j$. Обозначим через $T^{(1)}$ множество вершин $M \setminus \{a_i\}$. Предположим, что на шаге s уже определены строка $D^{(s)} = (d_1^{(s)}, \dots, d_n^{(s)})$, и множество вершин T_s . Выберем теперь вершину $a_j \in T_s$ так, что

$$d_j^{(s)} = \min \{d_k^{(s)} \mid a_k \in T_s\}.$$

Положим

$$T_{s+1} = T_s \setminus \{a_j\}, D^{(s+1)} = (d_1^{(s+1)}, \dots, d_n^{(s+1)}),$$

где $d_k^{(s+1)} = \min \{d_k^{(s)}, d_j^{(s)} + w_{jk}\}$, если $a_k \in T_{s+1}$, и

$$d_k^{(s+1)} = d_k^{(s)}, \text{ если } a_k \notin T_{s+1}.$$

На шаге $s = n - 1$, образуется строка $D^{(n-1)}$ w -расстояний между вершиной a_i и остальными вершинами графа: $d_k^{(n-1)} = \rho_w(a_i, a_j)$.

В общем случае задача решается с помощью алгоритмов Флойда, Форда, Беллмана и др.

Алгоритмы нахождения минимального пути могут быть использованы для поиска кратчайших путей в ориентированном графе без контуров. Для этого нужно каждой дуге приписать вес, равный единице.

Задача 5.16.

В составе экспедиции должно быть 6 специалистов: биолог, врач, синоптик, гидролог, механик и радист. Имеется 8 кандидатов, из которых и нужно выбрать участников экспедиции; условные имена претендентов: A, B, C, D, E, F, G и H . Обязанности биолога могут исполнять E и G , врача – A и D , синоптика – F и G , гидролога – B и F , радиста – C и D , механика – C и H . Предусмотрено, что в экспедиции каждый из них будет выполнять только одну обязанность. Кого и в какой должности следует включить в состав экспедицию, если F не может ехать без B , D – без H и C , C не может ехать вместе с G , A – вместе с B ?

Решение.

Заметим, что задать возможный вариант решения, то есть описать точный состав экспедиции, можно с помощью четного графа, в котором вершины разделены на две группы, а ребра могут соединять лишь вершины разных групп.

Применительно к задаче об экспедиции одна группа вершин есть группа из 8 кандидатов, а вторая – из 6 должностей.

Задача 5.17.

Планета имеет форму выпуклого многогранника, причем в его вершинах расположены города, а каждое ребро является дорогой. Две дороги за-

$$\begin{matrix} 1 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \end{matrix}$$

Задача 5.15.

Найдите цикл, содержащий все вершины додекаэдра, причем в точности по одному разу каждую.

Решение.

Этот цикл: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 19, 18, 14, 15, 16, 17, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 20. Этот цикл называется гамильтоновым циклом (рис. 5.18).

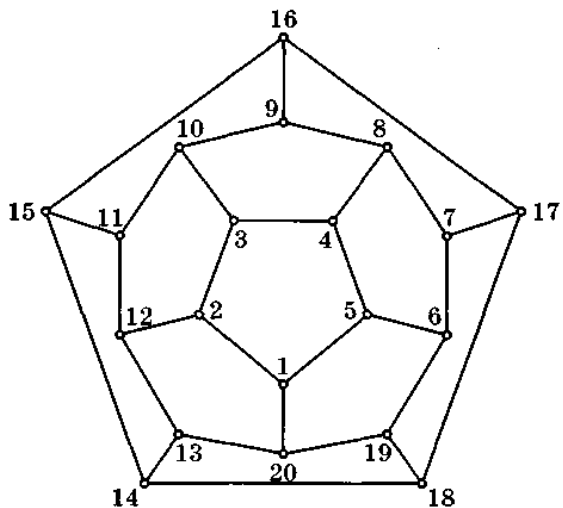


Рис. 5.18.

1.8 Алгоритм Форда – Беллмана нахождения минимального пути

Предполагается, что ориентированный граф не содержит контуров отрицательной длины.

Алгоритм 1. (Алгоритм Форда – Беллмана)

Основными вычисляемыми величинами этого алгоритма являются величины $\lambda_j(k)$, где $i = 1, 2, \dots, n$ (n – число вершин графа); $k = 1, 2, \dots, n - 1$. Для фиксированных i и k величина $\lambda_j(k)$ равна длине минимального пути, ведущего из заданной начальной вершины x_1 в вершину x_i и содержащего не более k дуг.

Шаг 1. Установка начальных условий. Ввести число вершин графа n и матрицу весов $C = (c_{ij})$.

Шаг 2. Положить $k = 0$. Положить $\lambda_i(0) = \infty$ для всех вершин, кроме x_1 ; положить $\lambda_1(0) = 0$.

Шаг 3. В цикле по k , $k = 1, \dots, n - 1$, каждой вершине x_i на k – ом шаге приписать индекс $\lambda_i(k)$ по следующему правилу:

$$\lambda_i(k) = \min_{1 \leq j \leq n} \{ \lambda_j(k-1) + c_{ji} \} \quad (1)$$

для всех вершин, кроме x_1 , положить $\lambda_1(k) = 0$.

В результате работы алгоритма формируется таблица индексов

$$\lambda_i(k), i = 1, 2, \dots, n, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n - 1.$$

При этом $\lambda_i(k)$ определяет длину минимального пути из первой вершины в i -ую, содержащего не более k дуг.

Шаг 5. Восстановление минимального пути. Для любой вершины x_s предшествующая ей вершина x_r определяется из соотношения:

$$\lambda_r(n-2) + c_{rs} = \lambda_s(n-1), \quad x_r \in G^{-1}(x_s), \quad (2)$$

где $G^{-1}(x_s)$ – прообраз вершины x_s .

Для найденной вершины x_r предшествующая ей вершина x_q определяется из соотношения:

$$\lambda_q(n-3) + c_{qr} = \lambda_r(n-2), \quad x_q \in G^{-1}(x_r),$$

где $G^{-1}(x_r)$ – прообраз вершины x_r , и т. д.

Последовательно применяя это соотношение, начиная от последней вершины x_i , найдем минимальный путь.

Пример 1.20.

С помощью алгоритма 1 найдем минимальный путь из вершины x_1 в вершину x_3 в графе, изображенном на рис. 1.16.

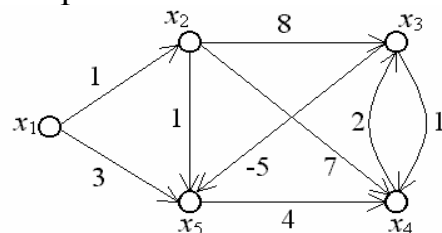


Рис. 1.16.

$a_{23} = 1$ – из 2 выходит одна стрелка к вершине 3;

$a_{24} = 0$ – из 2 не выходит ни одной стрелки к вершине 4;

$a_{31} = 1$ – из 3 выходит одна стрелка к вершине 1;

$a_{32} = 0$ – из 3 не выходит ни одной стрелки к вершине 2;

$a_{33} = 0$ – при 3 нет петель;

$a_{34} = 1$ – из 3 выходит одна стрелка к вершине 4;

$a_{41} = 3$ – из 4 выходит 3 стрелки к вершине 1;

$a_{42} = 1$ – из 4 выходит одна стрелка к вершине 2;

$a_{43} = 0$ – из 4 не выходит ни одной стрелки к вершине 3;

$a_{44} = 0$ – при 4 нет петель.

Строим оргграф (рис. 5.17).

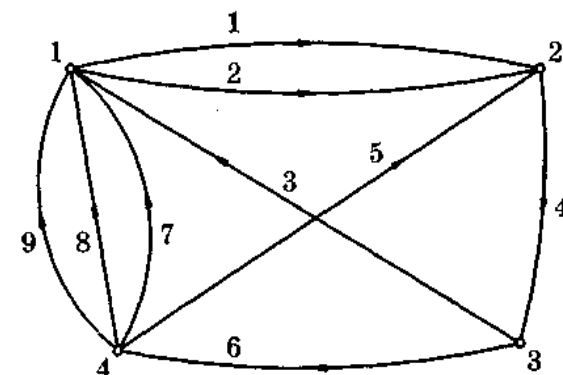


Рис. 5.17.

Для построенного графа запишем матрицу инцидентности:

Дана матрица

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

Постройте орграф, для которого данная матрица является матрицей смежности. Найдите матрицу инцидентности орграфа.

Решение.

Для построения орграфа его вершине однозначно сопоставим точку на плоскости. Данная матрица смежности имеет четыре строки и четыре столбца, следовательно, в орграфе четыре вершины: 1, 2, 3, 4.

Проанализируем элементы матрицы:

$a_{11} = 0$ – при вершине 1 нет петель;

$a_{12} = 2$ – из вершины 1 выходят две стрелки к вершине 2;

$a_{13} = 0$ – из 1 не выходит ни одной стрелки к вершине 3;

$a_{14} = 0$ – из 1 не выходит ни одной стрелки к вершине 4;

$a_{21} = 0$ – из 2 не выходит ни одной стрелки к вершине 1;

$a_{22} = 0$ – при 2 не петель;

Рассмотрим подробно работу алгоритма Форда – Беллмана для этого примера. Значения индексов $\lambda_i(k)$ будем заносить в таблицу индексов (табл. 1.2).

Шаг 1. Введем число вершин графа $n = 5$. Матрица весов этого графа имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 1 & \infty & \infty & 3 \\ \infty & \infty & 8 & 7 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & 1 & -5 \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 4 & \infty \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. Положим $k = 0$,

$$\lambda_1(0) = 0, \lambda_2(0) = \lambda_3(0) = \lambda_4(0) = \lambda_5(0) = \infty.$$

Эти значения занесем в первый столбец табл. 1.2.

Шаг 3. $k = 1$.

$$\lambda_1(1) = 0.$$

Равенство (1) для $k = 1$ имеет вид:

$$\lambda_i(1) = \min_{1 \leq j \leq 5} \{ \lambda_j(0) + c_{ji} \}.$$

$$\begin{aligned} \lambda_2(1) &= \min \{ \lambda_1(0) + c_{12}; \lambda_2(0) + c_{22}; \\ &\lambda_3(0) + c_{32}; \lambda_4(0) + c_{42}; \lambda_5(0) + c_{52}; \} = \\ &= \min \{ 0 + 1; \infty + \infty; \infty + \infty; \infty + \infty; \infty + \infty \} = 1. \\ \lambda_3(1) &= \min \{ \lambda_1(0) + c_{13}; \lambda_2(0) + c_{23}; \lambda_3(0) + \\ &+ c_{33}; \lambda_4(0) + c_{43}; \lambda_5(0) + c_{53}; \} = \\ &= \min \{ 0 + \infty; \infty + 8; \infty + \infty; \infty + 2; \infty + \infty \} = \infty. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_4(1) &= \min\{\lambda_1(0) + c_{14}; \lambda_2(0) + c_{24}; \lambda_3(0) + c_{34}; \lambda_4(0) + c_{44}; \lambda_5(0) + c_{54}\} = \\
&= \min\{0 + \infty; \infty + 7; \infty + 1; \infty + \infty; \infty + 4\} = \infty. \\
\lambda_5(1) &= \min\{\lambda_1(0) + c_{15}; \lambda_2(0) + c_{25}; \lambda_3(0) + c_{35}; \lambda_4(0) + c_{45}; \lambda_5(0) + c_{55}\} = \\
&= \min\{0 + 3; \infty + 1; \infty - 5; \infty + \infty; \infty + \infty\} = 3.
\end{aligned}$$

Полученные значения $\lambda_i(1)$ занесем во второй столбец таблицы. Убеждаемся, что второй столбец, начиная со второго элемента, совпадает с первой строкой матрицы весов, что легко объясняется смыслом величин $\lambda_i(1)$, которые равны длине минимального пути из первой вершины в i -ую, содержащего не более одной дуги.

$$k = 2.$$

$$\lambda_1(2) = 0.$$

Равенство (1) для $k = 2$ имеет вид:

$$\lambda_i(2) = \min_{1 \leq j \leq 5} \{\lambda_j(1) + c_{ji}\}.$$

$$\lambda_2(2) = \min\{0 + 1; 1 + \infty; \infty + \infty; \infty + \infty; 3 + \infty\} = 1.$$

$$\lambda_3(2) = \min\{0 + \infty; 1 + 8; \infty + \infty; \infty + 2; 3 + \infty\} = 9.$$

$$\lambda_4(2) = \min\{0 + \infty; 1 + 7; \infty + 1; \infty + \infty; 3 + 4\} = 7.$$

$$\lambda_5(2) = \min\{0 + 3; 1 + 1; \infty - 5; \infty + \infty; 3 + \infty\} = 2.$$

Полученные значения $\lambda_i(2)$ занесем в третий столбец таблицы. Величины $\lambda_i(2)$ равны длине минимального пути из первой вершины в i -ую, содержащего не более двух дуг.

Задача 5.13.

Дано множество $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. На этом множестве задано отношение $f: x > y$. Постройте орграф данного отношения.

Решение.

Для того чтобы построить орграф данного отношения $f: x > y$, изобразим все элементы множества V точками на плоскости и проведем стрелку от каждого большего числа к меньшему (рис. 5.16).

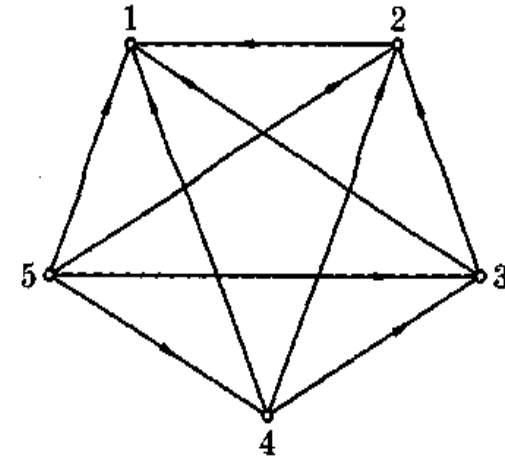


Рис. 5.16.

Задача 5.14.

подмножества множества упорядоченных пар $(v_i, v_j) \in V \times V$.

2. Изобразите орграф.

3. Постройте матрицу смежности.

Решение.

1. $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.

Множество пар:

$\{(v_1, v_1), (v_1, v_3), (v_1, v_5), (v_3, v_1), (v_3, v_2), (v_3, v_5), (v_4, v_1), (v_5, v_1), (v_5, v_2), (v_5, v_3), (v_5, v_4), (v_5, v_5)\}$.

2. См. рис. 5.15.

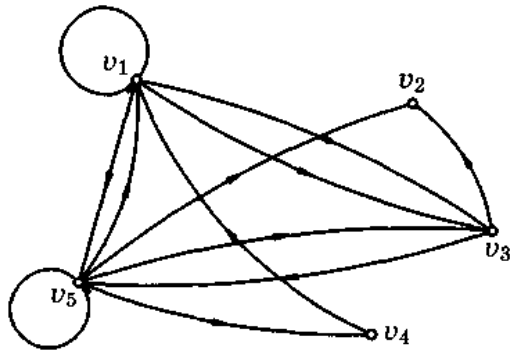


Рис. 5.15.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.

$$k = 3.$$

$$\lambda_1(3) = 0.$$

Равенство (1) для $k = 3$ имеет вид:

$$\lambda_i(3) = \min_{1 \leq j \leq 5} \{\lambda_j(2) + c_{ji}\}.$$

$$\lambda_2(3) = \min\{0 + 1; 1 + \infty; 9 + \infty; 7 + \infty; 2 + \infty\} = 1.$$

$$\lambda_3(3) = \min\{0 + \infty; 1 + 8; 9 + \infty; 7 + 2; 2 + \infty\} = 9.$$

$$\lambda_4(3) = \min\{0 + \infty; 1 + 7; 9 + 1; 7 + \infty; 2 + 4\} = 6.$$

$$\lambda_5(3) = \min\{0 + 3; 1 + 1; 9 - 5; 7 + \infty; 2 + \infty\} = 2.$$

Полученные значения $\lambda_i(3)$ занесем в четвертый столбец таблицы. Величины $\lambda_i(3)$ равны длине минимального пути из первой вершины в i -ую, содержащего не более трех дуг.

$$k = 4.$$

$$\lambda_1(4) = 0.$$

Равенство (1) для $k = 4$ имеет вид:

$$\lambda_i(4) = \min_{1 \leq j \leq 5} \{\lambda_j(3) + c_{ji}\}.$$

$$\lambda_2(4) = \min\{0 + 1; 1 + \infty; 9 + \infty; 6 + \infty; 2 + \infty\} = 1.$$

$$\lambda_3(4) = \min\{0 + \infty; 1 + 8; 9 + \infty; 6 + 2; 2 + \infty\} = 8.$$

$$\lambda_4(4) = \min\{0 + \infty; 1 + 7; 9 + 1; 6 + \infty; 2 + 4\} = 6.$$

$$\lambda_5(4) = \min\{0 + 3; 1 + 1; 9 - 5; 6 + \infty; 2 + \infty\} = 2.$$

Полученные значения $\lambda_i(4)$ занесем в пятый столбец таблицы. Величины $\lambda_i(4)$ равны длине минимального пути из первой вершины в i -ую, содержащего не более четырех дуг.

Таблица 1.2.

i (номер вершины)	$\lambda_i(0)$	$\lambda_i(1)$	$\lambda_i(2)$	$\lambda_i(3)$	$\lambda_i(4)$
1	0	0	0	0	0
2	∞	1	1	1	1
3	∞	∞	9	9	8
4	∞	∞	7	6	6
5	∞	3	2	2	2

Шаг 5. Восстановление минимального пути. Для последней вершины x_3 предшествующая ей вершина x_r определяется из соотношения (2) полученного при $s = 3$:

$$\lambda_r(3) + c_{r3} = \lambda_3(4), \quad x_r \in G^{-1}(x_3), (3)$$

где $G^{-1}(x_3)$ – прообраз вершины x_3 .

$$G^{-1}(x_3) = \{x_2, x_4\}.$$

Подставим в (3) последовательно $r = 2$ и $r = 4$, чтобы определить, для какого r это равенство выполняется:

$$\lambda_2(3) + c_{23} = 1 + 8 \neq \lambda_3(4) = 8,$$

$$\lambda_4(3) + c_{43} = 6 + 2 = \lambda_3(4) = 8.$$

Таким образом, вершиной, предшествующей вершине x_3 , является вершина x_4 .

Для вершины x_4 предшествующая ей вершина x_r определяется из соотношения (2) полученного при $s = 4$:

$$\lambda_r(2) + c_{r4} = \lambda_4(3), \quad x_r \in G^{-1}(x_4), (4)$$

Рис. 5.14.

Решение.

Матрица смежности

$$\begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \\ \text{D} \\ \text{E} \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \\ \text{D} \\ \text{E} \end{array}$$

Матрица инцидентности

$$\begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \\ \text{D} \\ \text{E} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array}$$

Задача 5.12.

Задан граф $G(V, E)$, где $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$;
 $E_{v_1} = \{v_1, v_3, v_5\}$; $E_{v_2} = \emptyset$; $E_{v_3} = \{v_1, v_2, v_5\}$; $E_{v_4} = \{v_1\}$;
 $E_{v_5} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.

1. Задайте граф с помощью бинарного отношения, т. е. совокупности множества V и

дов в вершину. Далее определим частичную подстановку, соединяя вершины x_i и y_i , с одинаковыми числами (рис. 5.13).

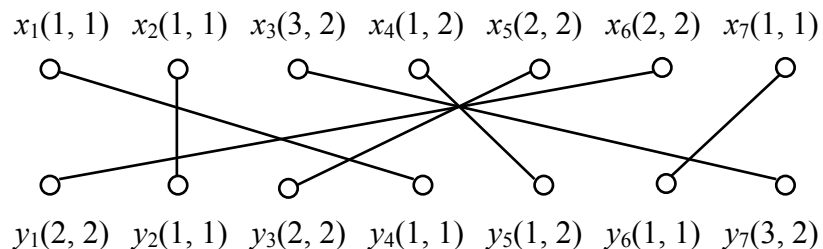


Рис. 5.13.

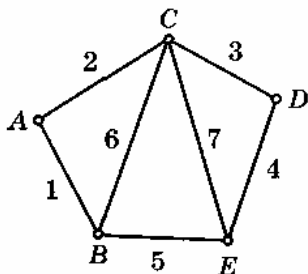
В результате получим подстановку

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ y_4 & y_2 & y_7 & y_5 & y_3 & y_1 & y_6 \end{pmatrix}$$

Следовательно, графы C_1 и C_2 изоморфны.

Задача 5.11.

Для неориентированного графа, изображенного на рис. 5.14, постройте матрицу смежности и матрицу инцидентности.



где $G^{-1}(x_4)$ – прообраз вершины x_4 .

$$G^{-1}(x_4) = \{x_2, x_3, x_5\}.$$

Подставим в (4) последовательно $r = 2$, $r = 3$ и $r = 5$, чтобы определить, для какого r это равенство выполняется:

$$\lambda_2(2) + c_{24} = 1 + 7 \neq \lambda_4(3) = 6,$$

$$\lambda_3(2) + c_{34} = 1 + 1 \neq \lambda_4(3) = 6,$$

$$\lambda_5(2) + c_{54} = 2 + 4 = \lambda_4(3) = 6,$$

Таким образом, вершиной, предшествующей вершине x_4 , является вершина x_5 .

Для вершины x_5 предшествующая ей вершина x_r определяется из соотношения (2) полученного при $s = 5$:

$$\lambda_r(1) + c_{r5} = \lambda_5(2), \quad x_r \in G^{-1}(x_5), \quad (5)$$

где $G^{-1}(x_5)$ – прообраз вершины x_5 .

$$G^{-1}(x_5) = \{x_1, x_2\}.$$

Подставим в (5) последовательно $r = 1$ и $r = 2$, чтобы определить, для какого r это равенство выполняется:

$$\lambda_1(1) + c_{15} = 0 + 3 \neq \lambda_5(2) = 2,$$

$$\lambda_2(1) + c_{25} = 1 + 1 = \lambda_5(2) = 2,$$

Таким образом, вершиной, предшествующей вершине x_5 , является вершина x_2 .

Для вершины x_2 предшествующая ей вершина x_r определяется из соотношения (2) полученного при $s = 2$:

$$\lambda_r(0) + c_{r2} = \lambda_2(1), \quad x_r \in G^{-1}(x_2), \quad (6)$$

где $G^{-1}(x_2)$ – прообраз вершины x_2 .

$$G^{-1}(x_2) = \{x_1\}.$$

Подставим в (6) $r = 1$, чтобы определить, выполняется ли это равенство:

$$\lambda_1(0) + c_{12} = 0 + 1 = \lambda_2(1) = 1.$$

Таким образом, вершиной, предшествующей вершине x_2 , является вершина x_1 .

Итак, найден минимальный путь – x_1, x_2, x_5, x_4, x_3 , его длина равна 8.

1.9. Алгоритм нахождения максимального пути

При решении некоторых практических задач возникает необходимость поиска максимального пути (пути с наибольшей суммой длин дуг). Такая задача сводится к задаче нахождения минимального пути заменой знаков при длинах дуг (в матрице весов C) на противоположные. При этом необходимым является требование отсутствия в ориентированном графе контуров положительной длины.

Пример 1.21.

С помощью модифицированного алгоритма найдем максимальный путь из вершины x_1 в вершину x_3 в графе, изображенном на рис. 1.17.

Рис. 5.11.

Анализируя граф, получаем следующий порядок движения: красная, черная, синяя, зеленая, белая.

Задача 5.10.

Пусть даны графы $G_1(X, E)$ и $G_2(Y, E)$, изображенные на рис. 5.12. Установите, изоморфны ли данные графы.

Решение.

Для доказательства того, что граф C_1 изоморфен графу C_2 необходимо и достаточно выполнение условия: найти такую подстановку, которая граф C_1 переводит в граф C_2 .

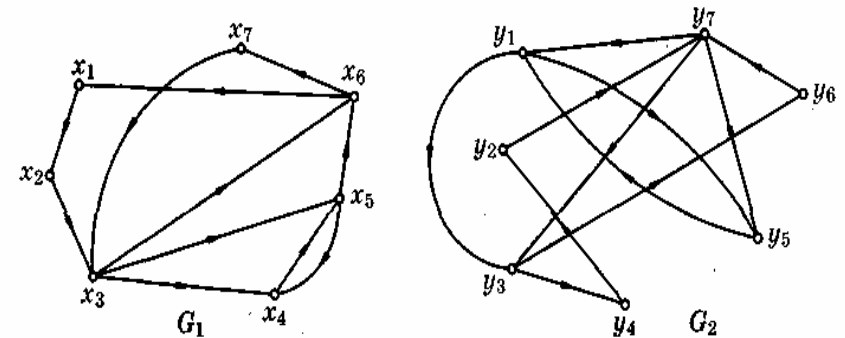


Рис. 5.12.

Запишем элементы $x \in X$ и $y \in Y$ с соответствующими им парами чисел, где первое число – число исходов из вершины, а второе – число захо-

тий элемент второй строки и т.д. Изменение элемента $c_{13}^{(2)} = 8$ по сравнению с $c_{13}^{(1)} = 10$, связанное с тем, что стоимость прохождения из v_1 в v_3 по пути ранга 2 оказалась меньше, чем стоимость прохождения по пути ранга 1. Минимальная же стоимость прохождения $c_{13}^{(4)} = 5$ получена по пути ранга 4.

Задача 5.9.

Из пункта A в пункт B выехали пять машин одной марки разного цвета: белая, черная, красная, синяя, зеленая. Черная едет впереди синей, зеленая – впереди белой, но позади синей, красная впереди черной. Какая машина едет первой и какая последней?

Решение.

Решаем задачу, построив ориентированный граф для отношения f : « x едет сзади y ». На плоскости отметим пять точек, соответствующих каждой машине, и обозначим их первой буквой цвета машины (рис. 5.11).

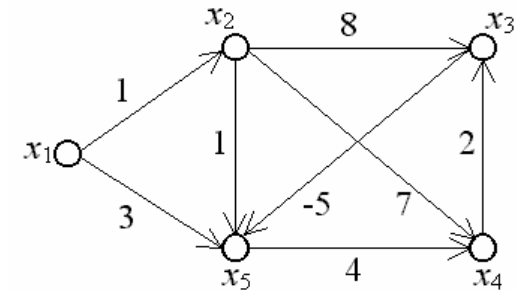
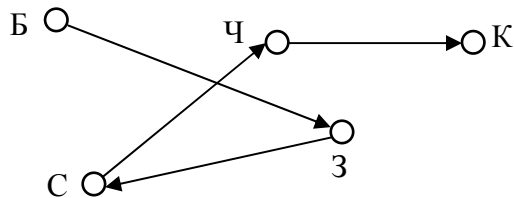


Рис. 1.17.

Шаг 1. Введем число вершин графа $n = 5$. Матрица весов этого графа после замены знаков при длинах дуг на противоположные имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} \infty & -1 & \infty & \infty & -3 \\ \infty & \infty & -8 & -7 & -1 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 5 \\ \infty & \infty & -2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & -4 & \infty \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. Положим $k = 0$,

$$\lambda_1(0) = 0, \lambda_2(0) = \lambda_3(0) = \lambda_4(0) = \lambda_5(0) = \infty.$$

Эти значения занесем в первый столбец таблицы 1.3.

Шаг 3. $k = 1$.

$$\lambda_1(1) = 0.$$

Равенство (1) для $k = 1$ имеет вид:

$$\lambda_i(1) = \min_{1 \leq j \leq 5} \{\lambda_j(0) + c_{ji}\}.$$

$$\begin{aligned}
\lambda_2(1) &= \min\{\lambda_1(0) + c_{12}; \lambda_2(0) + c_{22}; \\
&\lambda_3(0) + c_{32}; \lambda_4(0) + c_{42}; \lambda_5(0) + c_{52};\} = \\
&= \min\{0 - 1; \infty + \infty; \infty + \infty; \infty + \infty; \infty + \infty\} = -1. \\
\lambda_3(1) &= \min\{\lambda_1(0) + c_{13}; \lambda_2(0) + c_{23}; \\
&\lambda_3(0) + c_{33}; \lambda_4(0) + c_{43}; \lambda_5(0) + c_{53};\} = \\
&= \min\{0 + \infty; \infty - 8; \infty + \infty; \infty - 2; \infty + \infty\} = \infty. \\
\lambda_4(1) &= \min\{\lambda_1(0) + c_{14}; \lambda_2(0) + c_{24}; \\
&\lambda_3(0) + c_{34}; \lambda_4(0) + c_{44}; \lambda_5(0) + c_{54};\} = \\
&= \min\{0 + \infty; \infty - 7; \infty + \infty; \infty + \infty; \infty - 4\} = \infty. \\
\lambda_5(1) &= \min\{\lambda_1(0) + c_{15}; \lambda_2(0) + c_{25}; \\
&\lambda_3(0) + c_{35}; \lambda_4(0) + c_{45}; \lambda_5(0) + c_{55};\} = \\
&= \min\{0 - 3; \infty - 1; \infty + 5; \infty + \infty; \infty + \infty\} = -3.
\end{aligned}$$

Полученные значения $\lambda_i(1)$ занесем во второй столбец таблицы. Убеждаемся, что второй столбец, начиная со второго элемента, совпадает с первой строкой матрицы весов, что легко объясняется смыслом величин $\lambda_i(1)$, которые равны длине минимального пути из первой вершины в i -ую, содержащего не более одной дуги.

$k = 2$.

$$\lambda_1(2) = 0.$$

Равенство (1) для $k = 2$ имеет вид:

$$\lambda_i(2) = \min_{1 \leq j \leq 5} \{\lambda_j(1) + c_{ji}\}.$$

$$\begin{aligned}
\lambda_2(2) &= \min\{0 - 1; -1 + \infty; \infty + \infty; \infty + \infty; -3 + \infty\} = -1. \\
\lambda_3(2) &= \min\{0 + \infty; -1 - 8; \infty + \infty; \infty - 2; -3 + \infty\} = -9.
\end{aligned}$$

Затем, чтобы вычислить первый столбец матрицы $C^{(2)}$ берем второй (выделенный) столбец матрицы $C^{(1)}$ и умножаем (в полукольце R^+) его элементы по очереди на первый элемент второй (выделенной) строки той же матрицы $C^{(1)}$. Каждое такое произведение складываем в полукольце с одноименным элементом первого столбца матрицы $C^{(1)}$. Поскольку умножение в полукольце R^+ — это арифметическое сложение, а сложение — взятие наименьшего из двух чисел, мы получим следующие элементы первого столбца матрицы $C^{(2)}$:

$$\begin{aligned}
c_{11}^{(2)} &= \min\{c_{11}^{(1)}, c_{12}^{(1)} + c_{21}^{(1)}\} = \min\{0, \infty\} = 0, \\
c_{21}^{(2)} &= \min\{c_{21}^{(1)}, c_{22}^{(1)} + c_{21}^{(1)}\} = \min\{\infty, \infty\} = \infty, \\
c_{31}^{(2)} &= \min\{c_{31}^{(1)}, c_{32}^{(1)} + c_{21}^{(1)}\} = \min\{\infty, \infty\} = \infty, \\
c_{41}^{(2)} &= \min\{c_{41}^{(1)}, c_{42}^{(1)} + c_{21}^{(1)}\} = \min\{3, \infty\} = 3.
\end{aligned}$$

Как видим, первый столбец матрицы $C^{(2)}$ не изменился по сравнению с первым столбцом матрицы $C^{(1)}$. Это означает, что нельзя уменьшить стоимость прохождения в первую вершину из других вершин графа, идя через вторую вершину (смотри рис. примера 2).

Точно так же для вычисления второго столбца матрицы $C^{(2)}$. Умножаем второй столбец $C^{(1)}$ на второй элемент второй строки той же матрицы, для вычисления третьего столбца — на тре-

$$A = \begin{pmatrix} \infty & 5 & 10 & 1 \\ \infty & 2 & 3 & \infty \\ \infty & 1 & \infty & \infty \\ 3 & \infty & 4 & \infty \end{pmatrix},$$

используя формулу (4), последовательно находим

$$C^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 10 & 1 \\ \infty & 0 & 3 & \infty \\ \infty & 1 & 0 & \infty \\ 3 & 8 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 & 1 \\ \infty & 0 & 3 & \infty \\ \infty & 1 & 0 & \infty \\ 3 & 8 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 & 1 \\ \infty & 0 & 3 & \infty \\ \infty & 1 & 0 & \infty \\ 3 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & 1 \\ \infty & 0 & 3 & \infty \\ \infty & 1 & 0 & \infty \\ 3 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Например, матрица $C^{(2)}$ по матрице $C^{(1)}$ вычисляется так. Сначала выделим в $C^{(1)}$ вторую строку и второй столбец:

$$C^{(1)} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 5 & 10 & 1 \\ \hline \infty & 0 & 3 & \infty \\ \hline \infty & 1 & 0 & \infty \\ \hline 3 & 8 & 4 & 0 \end{array} \right)$$

$$\lambda_4(2) = \min\{0 + \infty; -1 - 7; \infty + \infty; \infty + \infty; -3 - 4\} = -8.$$

$$\lambda_5(2) = \min\{0 - 3; -1 - 1; \infty + 5; \infty + \infty; -3 + \infty\} = -3.$$

Полученные значения $\lambda_i(2)$ занесем в третий столбец таблицы. Величины $\lambda_i(2)$ равны длине минимального пути из первой вершины в i -ую, содержащего не более двух дуг.

$$\underline{k = 3.}$$

$$\lambda_1(3) = 0.$$

Равенство (1) для $k = 3$ имеет вид:

$$\lambda_i(3) = \min_{1 \leq j \leq 5} \{\lambda_j(2) + c_{ji}\}.$$

$$\lambda_2(3) = \min\{0 - 1; -1 + \infty; -9 + \infty; -8 + \infty; -3 + \infty\} = -1.$$

$$\lambda_3(3) = \min\{0 + \infty; -1 - 8; -9 + \infty; -8 - 2; -3 + \infty\} = -10.$$

$$\lambda_4(3) = \min\{0 + \infty; -1 - 7; -9 + \infty; -8 + \infty; -3 - 4\} = -8.$$

$$\lambda_5(3) = \min\{0 - 3; -1 - 1; -9 + 5; -8 + \infty; -3 + \infty\} = -4.$$

Полученные значения $\lambda_i(3)$ занесем в четвертый столбец таблицы. Величины $\lambda_i(3)$ равны длине минимального пути из первой вершины в i -ую, содержащего не более трех дуг.

$$\underline{k = 4.}$$

$$\lambda_1(4) = 0.$$

Равенство (1) для $k = 4$ имеет вид:

$$\lambda_i(4) = \min_{1 \leq j \leq 5} \{\lambda_j(3) + c_{ji}\}.$$

$$\lambda_2(4) = \min\{0 - 1; -1 + \infty; -10 + \infty; -8 + \infty; -4 + \infty\} = -1.$$

$$\lambda_3(4) = \min\{0 + \infty; -1 - 8; -10 + \infty; -8 - 2; -4 + \infty\} = -10.$$

$$\lambda_4(4) = \min\{0 + \infty; -1 - 7; -10 + \infty; -8 + \infty; -4 - 4\} = -8.$$

$$\lambda_5(4) = \min\{0 - 3; -1 - 1; -10 + 5; -8 + \infty; -4 + \infty\} = -5.$$

Полученные значения $\lambda_i(4)$ занесем в пятый столбец таблицы. Величины $\lambda_i(4)$ равны длине минимального пути из первой вершины в i -ую, содержащего не более четырех дуг.

Таблица 1.3.

i (номер вершины)	$\lambda_i(0)$	$\lambda_i(1)$	$\lambda_i(2)$	$\lambda_i(3)$	$\lambda_i(4)$
1	0	0	0	0	0
2	∞	-1	-1	-1	-1
3	∞	∞	-9	-10	-10
4	∞	∞	-8	-8	-8
5	∞	-3	-3	-4	-5

Заменяя в таблице 1.3 отрицательные числа положительными, получим таблицу индексов максимальных путей (таблица 1.4). При этом $\lambda_i(k)$ определяет длину максимального пути из первой вершины в i -ую, содержащего не более k дуг.

Таблица 1.4.

i (номер вершины)	$\lambda_i(0)$	$\lambda_i(1)$	$\lambda_i(2)$	$\lambda_i(3)$	$\lambda_i(4)$
1	0	0	0	0	0
2	∞	1	1	1	1
3	∞	∞	9	10	10
4	∞	∞	8	8	8
5	∞	3	3	4	5

$$c_{ij}^{(0)} = \begin{cases} a_{ij}, i \neq j \\ 1 + a_{ij}, i = j \end{cases} \quad (3)$$

Тогда матрицу стоимостей $C = A^*$ можно найти, вычисляя последовательно матрицы $C^{(k)}$, $k = 1, n$ по формулам (2), (3).

Вычисления по формулам (2) и (3) образуют алгоритм Флойда – Уоршелла – Клини определения стоимости прохождения между любыми парами вершин.

Для полуколец B и R^+ в силу того, что в них итерация любого элемента x равна единице полукольца, получим упрощенный вариант формулы (2):

$$c_{ij}^{(k)} = c_{ij}^{(k-1)} + c_{ik}^{(k-1)} c_{kj}^{(k-1)}. \quad (4)$$

Вычисления по формуле (4) начинают с матрицы определяемой соотношением (3). Все дальнейшие вычисления удобно также проводить в матричном виде. Для нахождения матрицы $C^{(k)}$ удобно определить сначала матрицу $D^{(k)}$, элементы которой вычисляются по формуле

$$d_{ij}^{(k)} = c_{ik}^{(k-1)} c_{kj}^{(k-1)}. \quad (5)$$

Чтобы найти j – й столбец матрицы $D^{(k)}$, достаточно k – й столбец матрицы $C^{(k-1)}$ умножить на j – й элемент k – й строки этой же матрицы.

Для нашего графа $C^{(0)} = A$, где матрица A имеет вид:

При первом способе следования стоимость прохождения из вершины v_i в v_j по всем путям ранга, не большего $k - 1$, составит $c_{ij}^{(k-1)}$.

При втором способе следования стоимость прохождения из v_i в v_k по всем путям ранга, не большего $k - 1$, будет равна $c_{ik}^{(k-1)}$. Стоимость прохождения из v_k в v_k по всем замкнутым путям ранга, не большего $k - 1$, составит $c_{kk}^{(k-1)}$.

Стоимость прохождения из вершины v_k в вершину v_j по пути ранга, не большего $k - 1$, равна $c_{kj}^{(k-1)}$ (смотри рис. 5.10).

Таким образом, стоимость прохождения по пути ранга, не большего k , при указанном способе следования составит

$$c_{ik}^{(k-1)}(c_{kk}^{(k-1)})^* c_{kj}^{(k-1)} \quad (1)$$

Описание «путешествия» из v_i в v_j по путям ранга, не большего k , приводит к следующей формуле для вычисления элемента матрицы $C^{(k)}$:

$$c_{ij}^{(k)} = c_{ij}^{(k-1)} + c_{ik}^{(k-1)}(c_{kk}^{(k-1)})^* c_{kj}^{(k-1)}. \quad (2)$$

Пусть a_{ij} – элементы матрицы меток дуг ориентированного графа. Поскольку каждый путь ранга 0 между несовпадающими вершинами состоит из одной дуги, а каждая вершина достижима сама из себя по пути нулевой длины с меткой 1 или по петле с меткой a_{ii} , то элементы матрицы $C^{(0)}$ имеют вид:

Шаг 5. Восстановление максимального пути производится по тому же правилу, что и для минимального пути.

Длина максимального пути равна 10. Этот путь состоит из трех дуг, т. к. $\lambda_i(3) = \lambda_i(4) = 10$. Поэтому в соотношении (2) будет выполнено, начиная с $n - 1$.

Учитывая это замечание, для последней вершины x_3 предшествующую ей вершину x_r определим из соотношения (2) полученного при $s = 3$:

$$\lambda_r(2) + c_{r3} = \lambda_3(3), \quad x_r \in G^{-1}(x_3), \quad (7)$$

где $G^{-1}(x_3)$ – прообраз вершины x_3 .

$$G^{-1}(x_3) = \{x_2, x_4\}.$$

Подставим в (7) последовательно $r = 2$ и $r = 4$, чтобы определить, для какого r это равенство выполняется:

$$\lambda_2(2) + c_{23} = 1 + 8 \neq \lambda_3(4) = 10,$$

$$\lambda_4(2) + c_{43} = 8 + 2 = \lambda_3(4) = 10.$$

Таким образом, вершиной, предшествующей вершине x_3 , является вершина x_4 .

Для вершины x_4 предшествующая ей вершина x_r определяется из соотношения (2) полученного при $s = 4$:

$$\lambda_r(1) + c_{r4} = \lambda_4(2), \quad x_r \in G^{-1}(x_4), \quad (8)$$

где $G^{-1}(x_4)$ – прообраз вершины x_4 .

$$G^{-1}(x_4) = \{x_2, x_5\}.$$

Подставим в (8) последовательно $r = 2$, $r = 3$ и $r = 5$, чтобы определить, для какого r это равенство выполняется:

$$\lambda_2(1) + c_{24} = 1 + 7 = \lambda_4(3) = 8,$$

$$\lambda_5(1) + c_{54} = 3 + 4 \neq \lambda_4(3) = 8,$$

Таким образом, вершиной, предшествующей вершине x_4 , является вершина x_2 .

Для вершины x_2 предшествующая ей вершина x_r определяется из соотношения (2) полученного при $s = 2$:

$$\lambda_r(0) + c_{r2} = \lambda_2(1), \quad x_r \in G^{-1}(x_2), \quad (9)$$

где $G^{-1}(x_2)$ – прообраз вершины x_2 .

$$G^{-1}(x_2) = \{x_1\}.$$

Подставим в (9) $r = 1$, чтобы определить, выполняется ли это равенство:

$$\lambda_1(1) + c_{12} = 0 + 1 = \lambda_2(1) = 1.$$

Таким образом, вершиной, предшествующей вершине x_2 , является вершина x_1 .

Итак, найден максимальный путь – x_1, x_2, x_4, x_3 , его длина равна 10.

1.10. Деревья

Определение 1.37. Неориентированным деревом (или просто *деревом*) называется связный граф без циклов. Этому определению эквивалентны, как легко показать, следующие определения:

Рис. 5.10.

по всем путям ранга, не превосходящего k . Ее элемент $c_{ij}^{(k)}$ содержит стоимость прохождения из вершины v_i в вершину v_j по всем путям рангов $0, 1, \dots, k-1, k$.

Выведем формулу для вычисления элемента $c_{ij}^{(k)}$ матрицы $C^{(k)}$. По пути ранга, не большего k , из вершины v_i в вершину v_j можно пройти следующими способами:

- 1) идя из вершины v_i в вершину v_j по некоторому пути ранга, не превосходящего $k-1$, т.е. минуя вершину v_k ;
- 2) сначала идя из v_i в v_k по пути ранга, не большего $k-1$, затем «покрутившись» любое число раз (а может быть, и ни разу) по какому-либо контуру или любому замкнутому пути из v_k в v_k ранга, не большего $k-1$, и, наконец, идя из вершины v_k в вершину v_j по пути ранга, не большего $k-1$ (см. рисунок).

гать, что все вершины пронумерованы подряд натуральными числами, начиная с 1.

Путь $v_{i_0} \rightarrow v_{i_1} \rightarrow \dots \rightarrow v_{i_m}$ длины m называют путем ранга k при $m > 1$, если k – наибольшее среди чисел i_1, \dots, i_{m-1} , и путем ранга 0 при $m = 1$. Путь нулевой длины также считают путем ранга 0. Таким образом, ранг пути – это максимальный номер вершины, в которую разрешено заходить по пути из v_i в v_j (исключая вершины v_i и v_j). Путь ранга 0 не содержит промежуточных вершин. Максимальный ранг пути в ориентированном графе при указанном выше способе нумерации равен числу его вершин.

Задача 5.8.

В ориентированном графе, изображенном на рис. 5.10, путь $v_1 \rightarrow v_4 \rightarrow v_1$ имеет ранг 4,

$v_4 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2$ – ранг 1,

$v_4 \rightarrow v_1 \rightarrow v_3 \rightarrow v_2$

$v_4 \rightarrow v_3 \rightarrow v_2$ – ранг 3,

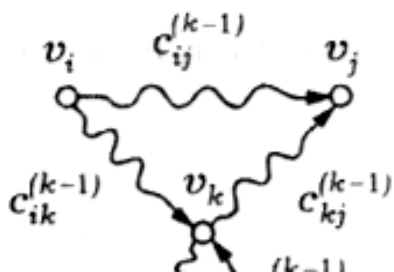
$v_4 \rightarrow v_1 \rightarrow v_3 \rightarrow v_2$ – ранг 3,

$v_4 \rightarrow v_2 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_2$ – ранг 3.

Определить матрицу стоимостей.

Решение.

Обозначим через $C^{(k)}$ матрицу стоимостей прохождения между различными парами вершин



а) дерево есть связный граф, содержащий n вершин и $n - 1$ ребер;

б) дерево есть граф, любые две вершины которого можно соединить простой цепью.

Пример 1.22.

Графы, изображенные на рис. 1.18, являются деревьями.

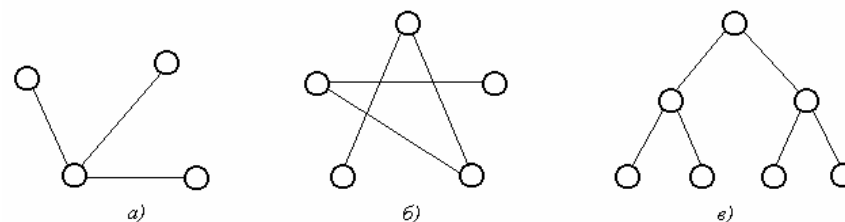


Рис. 1.18

Если граф несвязный и не имеет циклов, то каждая его связная компонента будет деревом. Такой граф называется *лесом*. Можно интерпретировать рис. 1.18 как лес, состоящий из трех деревьев.

Определение 1.38. *Остовным деревом* связного графа G называется любой его подграф, содержащий все вершины графа G и являющийся деревом.

Пример 1.23.

Для графа, изображенного на рис. 1.19 а), графы на рис. 1.19 б) и 1.19 в) являются остовными деревьями.

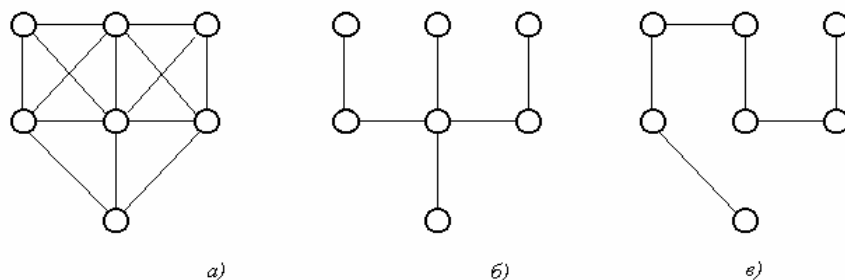


Рис. 1.19.

Пусть граф G имеет n вершин и m ребер. Так как всякое дерево с n вершинами по определению имеет $n - 1$ ребер, то любое остовное дерево графа G получается из этого графа в результате удаления $m - (n - 1) = m - n + 1$ ребер.

Определение 1.39. Число $\gamma = m - n + 1$ называется *цикломатическим числом* графа.

1.11. Минимальные остовные деревья нагруженных графов

Пусть G – связный нагруженный граф. Задача построения *минимального остовного дерева* заключается в том, чтобы из множества остовных деревьев найти дерево, у которого сумма длин ребер минимальна.

Приведем типичные случаи, когда возникает необходимость построения минимального остовного дерева графа.

в нем нулей полукольца во второй и третьей строках говорит о том, что вершина v_1 не достижима из вершин v_2 и из v_3 .

Аналогично вычисляются остальные столбцы матрицы A^* . Результат будет следующим:

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & 1 \\ \infty & 0 & 3 & \infty \\ \infty & 1 & 0 & \infty \\ 3 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Для данного простого ориентированного графа легко сопоставить полученный алгебраический результат с результатом «визуального» анализа ориентированного графа. Рассмотрим, например, пару вершин (v_1, v_3) . В ориентированном графе есть различные пути из вершины v_1 в вершину v_3 . Вычислим метки по *простым путям*. По пути $v_1 \rightarrow v_4 \rightarrow v_3$ сумма меток равна 5, по пути $v_1 \rightarrow v_3 - 10$, а по пути $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 - 8$. Кратчайшее расстояние – 5, что совпадает с ответом, полученным алгебраически: элемент a_{13}^* также равен 5.

Есть еще один способ вычисления замыкания матрицы с элементами в замкнутом полукольце. Он основан на понятии пути ранга k из вершины v_i в вершину v_j .

Пусть в ориентированном графе выбрана и зафиксирована нумерация вершин. Будем пола-

Из первого уравнения системы сразу следует, что $x_1 = 0$, так как одно из слагаемых в правой части есть элемент 0. Напомним, что итерация любого элемента в рассматриваемом полукольце равна единице полукольца. Учитывая этот факт, из второго уравнения получаем

$$x_2 = 2 * (3x_3 + \infty) = 3x_3$$

Исключая x_2 из остальных уравнений системы и учитывая, что $x_1 = 0$, получаем

$$\begin{cases} x_2 = 3x_3 & + \infty \\ x_3 = 1(3x_3) & + \infty \\ x_4 = 3 \cdot 0 + 4x_3 & + \infty. \end{cases}$$

Далее, из второго уравнения имеем

$$x_3 = (1 \cdot 3) x_3 + \infty = 4x_3 + \infty$$

откуда $x_3 = 4 * \infty = \infty$, и поэтому

$$x_4 = 3 \cdot 0 + 4 \cdot \infty = 3 + \infty = 3.$$

Подставляя найденное значение x_3 в выражение для x_2 , получаем $x_2 = \infty$. Первый столбец искомой матрицы вычислен:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \infty \\ \infty \\ 3 \end{pmatrix}$$

Этот столбец содержит кратчайшие расстояния от всех вершин графа до вершины v_l . Наличие

а) Нужно соединить n городов железнодорожными линиями (автомобильными дорогами, линиями электропередач, сетью трубопроводов и т.д.) так, чтобы суммарная длина линий или стоимость была бы минимальной.

б) Требуется построить схему электрической сети, в которой клеммы должны быть соединены с помощью проводов наименьшей общей длины.

Задачу построения минимального остовного дерева можно решить с помощью следующего алгоритма.

Алгоритм 2. (Алгоритм Краскала)

Шаг 1. Установка начальных значений. Вводится матрица длин ребер C графа G .

Шаг 2. Выбрать в графе G ребро минимальной длины. Построить граф G_2 , состоящий из данного ребра и инцидентных ему вершин. Положить $i = 2$.

Шаг 3. Если $i = n$, где n – число ребер графа, то закончить работу (задача решена), в противном случае перейти к шагу 4.

Шаг 4. Построить граф G_{i+1} , добавляя к графу G_i новое ребро минимальной длины, выбранное среди всех ребер графа G , каждое из которых инцидентно какой-нибудь вершине графа G_i и одновременно инцидентно какой-нибудь вершине графа G , не содержащейся в G_i . Вместе с этим ребром включаем в G_{i+1} и инцидентную ему вершину, не

содержащуюся в G_i . Присваиваем $i := i + 1$ и переходим к шагу 3.

Пример 1.24.

Найдем минимальное остовное дерево для графа, изображенного на рис. 1.20.

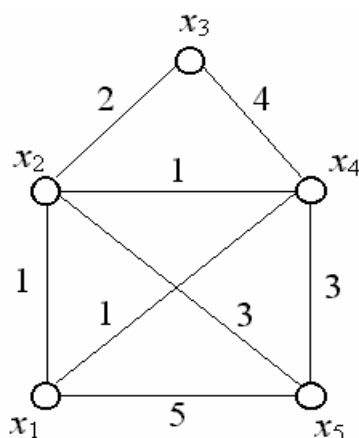


Рис. 1.20.

Шаг 1. Установка начальных значений.

Введем матрицу длин ребер C :

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 1 & \infty & 1 & 5 \\ 1 & \infty & 2 & 1 & 3 \\ \infty & 2 & \infty & 4 & \infty \\ 1 & 1 & 4 & \infty & 3 \\ 5 & 3 & \infty & 3 & \infty \end{pmatrix}.$$

решение нужно искать, используя метод исключения.

Задача 5.7.

Для графа, изображенного на рис. 5.9, вычислить матрицу кратчайших расстояний, перейдя к полукольцу R^+ .

Решение.

Взвешенный ориентированный граф задается следующей матрицей A .

$$A = \begin{pmatrix} \infty & 5 & 10 & 1 \\ \infty & 2 & 3 & \infty \\ \infty & 1 & \infty & \infty \\ 3 & \infty & 4 & \infty \end{pmatrix}$$

Система для вычисления первого столбца матрицы A^* имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = 5x_2 + 10x_3 + 1x_4 + 0 \\ x_2 = 2x_2 + 3x_3 + \infty \\ x_3 = 1x_2 + \infty \\ x_4 = 3x_1 + 4x_3 + \infty \end{cases}$$

Обратим внимание на нюансы, связанные с работой в полукольце R^+ : элементы 1 и 0 не являются единицей и нулем полукольца, т.е.

$$x \neq x + 0, x \neq 1 \cdot x$$

в общем случае.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Аналогично вычисляем третий и четвертый столбцы и в результате получаем матрицу A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Анализ этой матрицы показывает, что данный граф связан и имеет две бикомпоненты:

$$\{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}$$

В полукольце B можно упростить решение систем уравнений, воспользовавшись свойствами полукольца. Легко видеть, что наименьшее решение уравнения

$$x_k = \sum_{i=1}^n a_i x_i + 1$$

есть $x_k = 1$ и не зависит от значений переменных в правой части уравнения. Из первого уравнения сразу получаем $x_1 = 1$. Тогда четвертое уравнение принимает вид $x_4 = x_3 + 1$, откуда $x_4 = 1$. Поскольку x_1 и x_4 не входят в оставшиеся два уравнения, их

Шаг 2. Выберем ребро минимальной длины. Минимальная длина ребра равна единице. Таких ребер три:

$$(x_1, x_2), (x_1, x_4), (x_2, x_4).$$

В этом случае можно взять любое. Возьмем (x_1, x_2) . Построим граф G_2 , состоящий из данного ребра и инцидентных ему вершин x_1 и x_2 . Положим $i = 2$.

Шаг 3. Так как $n = 5$, то $i \neq n$, поэтому переходим к шагу 4.

Шаг 4. Строим граф G_3 , добавляя к графу G_2 новое ребро минимальной длины, выбранное среди всех ребер графа G , каждое из которых инцидентно одной из вершин x_1, x_2 и одновременно инцидентно какой-нибудь вершине графа G , не содержащейся в G_2 , т.е. одной из вершин x_3, x_4, x_5 . Таким образом, нужно выбрать ребро минимальной длины из ребер $(x_1, x_4), (x_1, x_5), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_2, x_5)$. Таких ребер длины единица два:

$$(x_1, x_4) \text{ и } (x_2, x_4).$$

Можно выбрать любое. Возьмем (x_1, x_4) . Вместе с этим ребром включаем в G_3 вершину x_4 , не содержащуюся в G_2 . Полагаем $i = 3$ и переходим к шагу 3.

Шаг 3. Так как $i \neq n$, поэтому переходим к шагу 4.

Шаг 4. Строим граф G_4 , добавляя к графу G_3 новое ребро минимальной длины из ребер $(x_1, x_5), (x_2, x_3), (x_2, x_5), (x_4, x_5)$. Такое ребро длины два одно:

$$(x_2, x_3).$$

Вместе с этим ребром включаем в G_4 вершину x_3 , не содержащуюся в G_3 . Полагаем $i = 4$ и переходим к шагу 3.

Шаг 3. Так как $i \neq n$, поэтому переходим к шагу 4.

Шаг 4. Строим граф G_5 , добавляя к графу G_3 новое ребро минимальной длины из ребер (x_1, x_5) , (x_2, x_5) , (x_4, x_5) . Таких ребер длины три два:

(x_2, x_5) и (x_4, x_5) .

Возьмем (x_2, x_5) . Вместе с этим ребром включаем в G_5 вершину x_5 , не содержащуюся в G_4 . Полагаем $i = 5$ и переходим к шагу 3.

Шаг 3. Так как $i = n$, то граф G_5 – искомое минимальное остовное дерево. Суммарная длина ребер равна $1 + 1 + 2 + 3 = 7$.

Процесс построения минимального остовного дерева изображен на рис. 1.21.

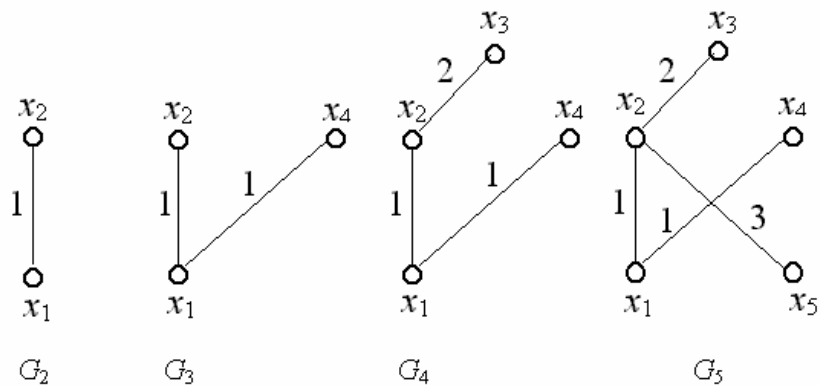


Рис. 1.21.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Второй столбец определяется из системы

$$\begin{cases} x_1 = & x_2 + x_3 + x_4 + 0 \\ x_2 = & x_2 + x_3 & + 1 \\ x_3 = & x_2 & + 0 \\ x_4 = x_1 & + x_3 & + 0 \end{cases}$$

Исключая x_1 , получаем

$$\begin{cases} x_2 = x_2 + x_3 & + 1 \\ x_3 = x_2 & + 0 \\ x_4 = x_2 + x_3 + x_4 + 0 \end{cases}$$

Из второго уравнения имеем

$$x_2 = 1 * (x_3 + 1) = x_3 + 1.$$

Далее находим

$$\begin{cases} x_3 = x_3 & + 1 \\ x_4 = x_3 + x_4 + 1 \end{cases}$$

Отсюда $x_3 = 1 * 1 = 1$ и $x_4 = x_4 + 1$.

В итоге

$$x_4 = 1 * 1 = 1, x_2 = 1 + 1 = 1, \\ x_1 = 1 + 1 + 1 + 0 = 1.$$

Таким образом, второй столбец A^* есть

$$\begin{array}{rcl} x_2 & = & x_2 + x_3 + 0 \\ x_3 & = & x_2 + 0 \\ x_4 = x_1 & & + x_3 + 0 \end{array}$$

Часто нулевые слагаемые не записывают, как и в системах уравнений в поле действительных чисел.

Воспользуемся методом последовательного исключения неизвестных. Поскольку в правой части первого уравнения нет переменной x_1 , можно исключить эту переменную из системы, подставив в остальные уравнения. С учетом идемпотентности сложения получим:

$$\begin{cases} x_2 = x_2 + x_3 + 0 \\ x_3 = x_2 + 0 \\ x_4 = x_2 + x_3 + x_4 + 1 \end{cases}$$

Из второго уравнения имеем $x_2 = 1 \cdot (x_3 + 0)$. В полукольце B итерация любого элемента равна единице полукольца. Поэтому $x_2 = x_3 + 0$. Исключив x_2 из системы, получим

$$\begin{cases} x_3 = x_3 + 0 \\ x_4 = x_3 + x_4 + 1 \end{cases}$$

Далее вычислим $x_3 = 1 \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0$. Подставив $x_3 = 0$ в последнее уравнение, найдем

$$x_4 = 1 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1$$

Итак, первый столбец A^* есть

1.12. Раскраски графов

Пусть $G = (M, R)$ – неорграф без петель.

Определение 1.40. Раскраской (вершин) графа G называется такое задание цветов вершинам G , что если $[a, b]$ – ребро, то вершины a и b имеют различные цвета. Раскраска называется *правильной*, если образы любых двух смежных вершин различны.

Определение 1.41. Хроматическим числом $\chi(G)$ графа G называется минимальное число цветов, требующееся для раскраски G .

Раскраска вершин графа в χ цвета есть разбиение множества вершин графа на попарно непесекающиеся непустые подмножества, состоящие из попарно несмежных вершин, т.е.

$$\begin{aligned} M &= M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_m; \\ M_i \cap M_j &= \emptyset, i \neq j, 1 \leq i, j \leq m. \end{aligned}$$

Пример 1.25.

Так как в полном графе K_n любые две различные вершины связаны ребром, то $\chi(K_n) = n$.

Пример 1.26.

1. Рассмотрим задачу составления расписания. Предположим, что нужно прочесть несколько лекций за кратчайшее время. Чтение каждой лекции в отдельности занимает один час, но некоторые лек-

ции не могут читаться одновременно (например, их читает один и тот же лектор). Построим граф G , вершины которого биективно соответствуют лекциям и две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им лекции нельзя читать одновременно. Очевидно, что любая раскраска этого графа определяет допустимое расписание: лекции, соответствующие вершинам одного цвета, могут читаться одновременно. Напротив, любое допустимое расписание определяет раскраску графа G . Оптимальные расписания соответствуют раскраскам с минимальным числом цветов, а число часов, необходимое для прочтения всех лекций, равно $\mathcal{M}(G)$.

2. Рассмотрим граф G , вершины которого – страны, а ребра соединяют страны, имеющие общую границу. Число $\mathcal{M}(G)$ соответствует наименьшее число красок, необходимых для раскраски карты так, чтобы никакие две соседние страны не были окрашены в один цвет.

Существуют и практические задачи, связанные с раскраской ребер в мультиграфе.

Раскраска ребер в мультиграфе G может быть определена с помощью раскраски вершин так называемого реберного мультиграфа $L(G)$.

Определение 1.42. Для произвольного неориентированного мультиграфа $G = (M, U, P)$ реберным мультиграфом $L(G)$ называется тройка (U, M, P') ,

Задача 5.6.

Для графа, изображенного на рис. 5.9, решить задачу вычисления матрицы достижимости.

Решение

На числовые метки дуг внимания пока не обращаем, считая, что ориентированный граф размечен над полукольцом B и метка каждой дуги равна 1, т.е. ориентированный граф задан матрицей A .

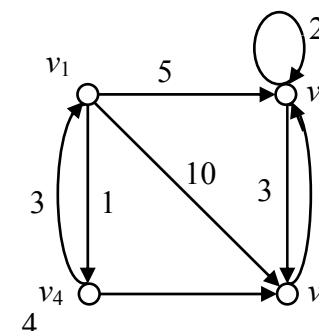


Рис. 5.9.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Запишем систему уравнений в полукольце B для определения первого столбца матрицы A^* :

$$\begin{cases} x_1 = & x_2 + x_3 + x_4 + 1 \\ & & & 121 \end{cases}$$

Рис. 5.8.
Решение.

	1	2	3	4	5
1	1	1	0	0	0
2	1	0	1	0	0
3	1	0	0	0	1
4	0	0	1	1	0
5	0	1	0	1	0

Число дуг, исходящих из вершины a_i , называется *степенью ее исхода* d_i^- , заходящих в a_i – *степенью захода* d_i^+ , $d_i^- + d_i^+ = d_i$ – *степенью вершины* i . Так, вершина 3 имеет степень захода, равную 2, степень исхода – 2. Степень вершины равна 4.

где $P' \not\subseteq U \times M \times U$, и выполняется $(u, a, v) \in P'$ тогда и только тогда, когда в мультиграфе G вершина a является концом ребер u и v .

Определение 1.43. Раскраской ребер мультиграфа G называется раскраска вершин мультиграфа $L(G)$.

Пример 1.27.

Проводится монтаж аппаратуры. Чтобы не перепутать проводники, необходимо их окрасить таким образом, чтобы два проводника, идущие к одной плате, имели разные цвета. В этом случае вершинами являются платы, а ребрами – проводники.

Определение 1.44. Неорграф G называется *бихроматическим*, если $\chi(G) = 2$.

Рассмотрим простой алгоритм построения раскраски, который во многих случаях приводит к раскраскам, близким к минимальным.

Алгоритм последовательной раскраски

1. Произвольная вершина a_1 графа G принимает цвет 1.
2. Если вершины a_1, \dots, a_i раскрашены l цветами 1, 2, ..., l , $l \in i$, то новой произвольно взятой вершине a_{i+1} припишем минимальный цвет, не использованный при раскраске вершин из множества

$$\{a_j \mid \rho(a_{i+1}, a_j) = 1, j < i\}.$$

Для некоторых классов графов последовательная раскраска является минимальной. В общем случае это не так.

1.13. Расстояния в графах

Пусть $G = (M, R)$ – связный неорграф, a, b – две его несовпадающие вершины.

Определение 1.45. Длина кратчайшего (a, b) – маршрута называется *расстоянием* между вершинами a и b и обозначается через $\rho(a, b)$.

Определение 1.46. Если $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, то матрица $P = (p_{ij})$, в которой $p_{ij} = \rho(a_i, a_j)$, называется *матрицей расстояний*.

Определение 1.47. Для фиксированной вершины a величина $e(a) = \max \{\rho(a, b) \mid b \in M\}$ называется *эксцентриситетом* вершины a . Таким образом, эксцентриситет вершины равен расстоянию от данной вершины до наиболее удаленной от нее.

Если P – матрица расстояний, то эксцентриситет $e(a_i)$ равен наибольшему из чисел, стоящих в i -й строке.

Определение 1.48. Максимальный среди всех эксцентриситетов вершин называется *диаметром* графа G и обозначается через $d(G)$:

$$d(G) = \max \{e(a) \mid a \in M\}.$$

Определение 1.49. Вершина a называется *периферийной*, если $e(a) = d(G)$.

могут соответствовать такой компании (рис. 5.6 и рис. 5.7).

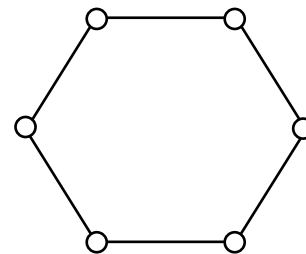


Рис. 5.6.

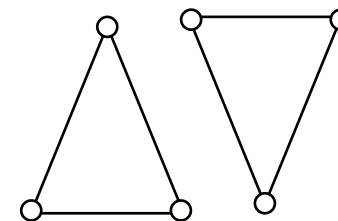


Рис. 5.7.

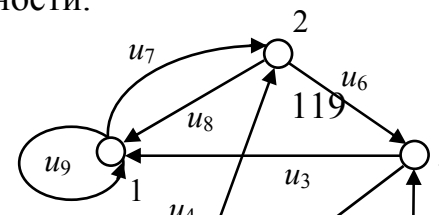
Итак, ситуация рассмотренная в задаче вполне возможна. Но случай, рассмотренный на рис. 5.7, соответствует не одной, а двум компаниям, участники одной из них не знакомы с участниками другой.

Про граф, изображенный на рис. 5.6, говорят, что он связный, так как из каждой вершины по ребрам можно попасть в любую другую. Делаем вывод, что в этом случае каждый через своих знакомых может познакомиться со всеми остальными.

Во втором случае получились два простых цикла, не сцепленные между собой в вершинах. Такой граф называется не связным.

Задача 5.5.

Для графа $G = (A, U)$ (рис. 5.8) найти матрицу смежности.



сматриваемой компании нельзя выделить ни четырехугольник, ни треугольник, поскольку тогда из оставшихся нельзя будет составить компанию, удовлетворяющую условию, т.е. схема знакомства единственная. Всякую схему, напоминающую многоугольник, принято называть циклом. (Древние греки «цикл» называли «колесом»; и действительно на рис. 5.5 изображено нечто, напоминающее колесо и с успехом заменяющее в рассматриваемой ситуации многоугольник.)

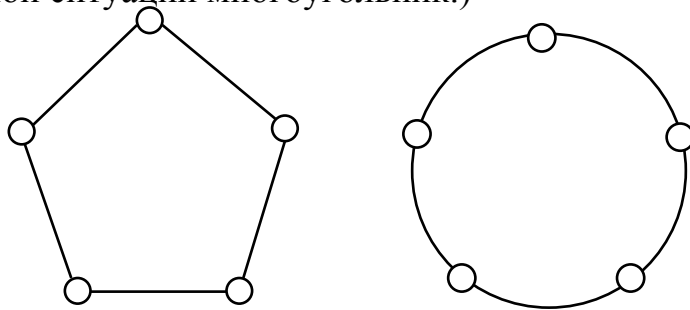


Рис. 5.5.

Задача 5.4.

Может ли так случиться, что в одной компании из шести человек каждый знаком с двумя и только двумя другими?

Решение.

Участника этой компании изобразим вершиной графа, а отношение знакомства между двумя участниками – ребром. Изобразим графы, которые

Пример 1.28.

Найдем диаметр графа G , изображенного на рис. 1.22.

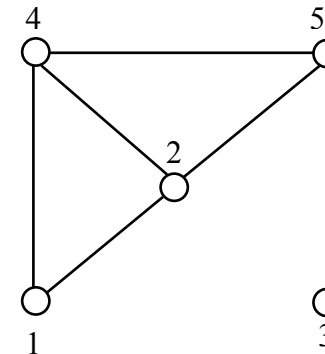


Рис. 1.22.

Матрица расстояний имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

отсюда

$e(1) = 3, e(2) = 2, e(3) = 3, e(4) = 2, e(5) = 2$ и, следовательно, $d(G) = 3$. Вершины 1 и 3 являются периферийными.

Определение 1.50. Минимальный из эксцентриситетов графа G называется его *радиусом* и обозначается через $r(G)$:

$$r(G) = \min\{e(a) \mid a \in M\}.$$

Определение 1.51. Вершина a называется *центральной*, если $e(a) = r(G)$.

Определение 1.52. Множество всех центральных вершин графа называется его *центром*.

Пример 1.29.

Радиус графа, показанного на рис. 1.22, равен 2, а его центром является множество $\{2, 4, 5\}$.

1.14. Фундаментальные циклы

Пусть $G = (M, R)$ – неорграф, имеющий n вершин, m ребер и c компонент связности, T – остов графа G .

Определение 1.53. Число $\nu(G) = m - n + c$ называется *цикломатическим числом* или *циклическим рангом* графа G .

Определение 1.54. Число $\nu^*(G) = n - c$ называется *коциклическим рангом* или *корангом* графа G .

Таким образом, $\nu^*(G)$ есть число ребер, входящих в остов графа.

Определение 1.55. Остов T графа G имеет $\nu^*(G) = n - c$ ребер u_1, \dots, u_{n-c} , которые называются *ветвями* остова.

Рис. 5.4.

разрезаются, закрашены целиком; остальные остаются незакрашенными.

При разрезании одного листа на три части число листков увеличивается на два. Если же вместо одного разрезано k листов, то образовалось

$$1 + 2^k$$

листов (рис. 5.4).

Задача 5.3.

Утверждают, что в одной компании из пяти человек каждый знаком с двумя и только с двумя другими. Возможна ли такая компания?

Решение.

Каждого из этой компании изобразим на рисунке кружком. Если двое знакомы, соединим соответствующие кружки отрезком. Оказывается, такие ситуации не только возможны, но все их можно описать аналогичными схемами. Из рас-

ФО, отметим жирной линией FH, НК, и КО (рис. 5.3). Найдем единственно возможный при данном условии маршрут.

Рис. 5.3.

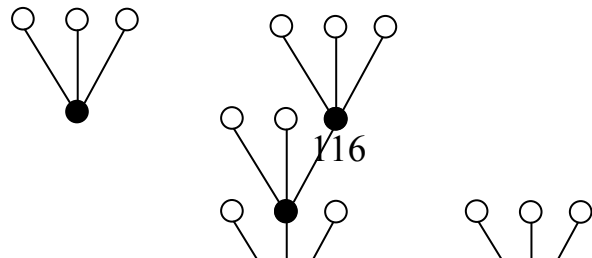
Подведем первый итог: задача решена в ходе преобразования картинки. С рисунка остается считать ответ: имение Е принадлежит Манилову, D – Коробочке, С – Ноздреву, А – Собакевичу, В – Плюшкину, М – Тентетникову, F – Бетрищеву, Н – Петуху, К – Констанжогло, О – Кошкареву.

Задача 5.2.

Лист бумаги Плюшкин разрезает на три части. Некоторые из этих полученных листов он также разрезает на три части. Несколько новых листов он вновь разрезает на три более мелкие и т.д. Сколько Плюшкин получает листов бумаги, если разрезает k листов?

Решение.

Листы бумаги обозначим на рисунке кружками. Кружки, соответствующие листам, которые



Определение 1.56. Оставшиеся $m - n + c$ ребер u_i, \dots, u_{m-n+c} , не входящие в T , называются *хордами* остова T .

Если к лесу T добавить произвольную хорду v_i , то в полученном графе найдется ровно один цикл, который обозначим через C_i . Цикл C_i состоит из хорды v_i и некоторых ветвей остова T , которые принадлежат единственной простой цепи, соединяющей вершины хорды v_i .

Определение 1.57. Цикл C_i называется *фундаментальным циклом* графа G относительно хорды v_i остова T .

Определение 1.58. Множество $\{C_i, \dots, C_{m-n+c}\}$ всех фундаментальных циклов относительно хорд остова T называется *фундаментальным множеством* циклов графа G относительно остова T .

Отметим, что мощность фундаментального множества циклов равна цикломатическому числу $\nu(G) = m - n + c$.

Обозначим через (w_i, \dots, w_m) последовательность $(v_1, v_2, \dots, v_{m-n+c}, u_1, u_2, \dots, u_{n-c})$ всех ребер графа G . Тогда фундаментальному циклу C_i соответствует вектор $\bar{a} = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im})$, определенный по следующему правилу:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } w_j \in C_i \\ 0, & \text{если } w_j \notin C_i \end{cases}$$

Теперь фундаментальное множество циклов можно задать с помощью *матрицы фундаментальных циклов*, строки которой являются векторами $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_{v(G)}$:

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{v(G),1} & a_{v(G),2} & \dots & a_{v(G),m} \end{pmatrix}$$

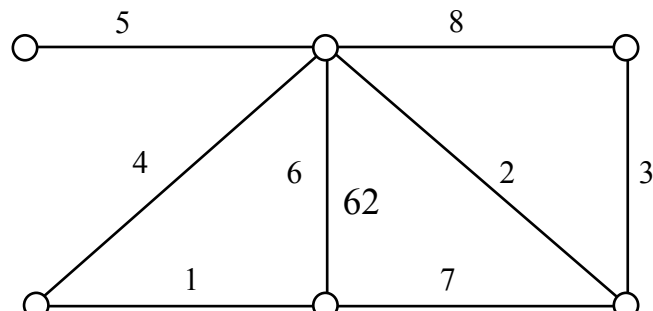
Так как каждый фундаментальный цикл C_i содержит ровно одну хорду, а именно v_i , то матрица C имеет вид:

$$C = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & a_{1,v(G)+1} & \dots & a_{1m} \\ & 1 & a_{2,v(G)+1} & \dots & a_{2m} \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & a_{v(G),v(G)+1} & \dots & a_{v(G),m} \end{array} \right)$$

Таким образом, $C = (C_1 | C_2)$, где C_1 – единичная матрица порядка $v(G)$.

Пример 1.30.

Найдем матрицу фундаментальных циклов графа G , изображенного на рис. 1.23.



принадлежит, если ни по одной из дорог Чичиков не проезжал более одного раза.

Решение.

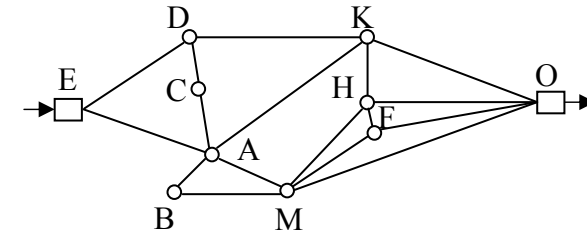


Рис. 5.1.

По схеме видно, что путешествие Чичиков начал с имения E , а кончил имением O . Замечаем, что в имения B и C ведут только по две дороги, поэтому по этим дорогам Чичиков должен был проехать. Отметим их жирной линией (рис. 5.2).

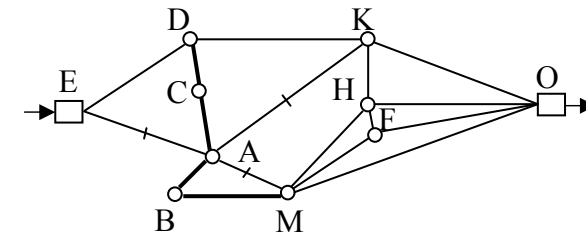
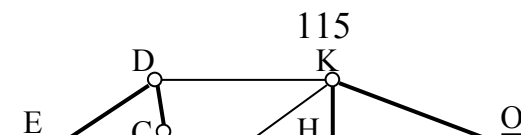


Рис. 5.2.

Определены участки маршрута, проходящие через A : AC и AB . По дорогам AE , AK и AM Чичиков не ездил. Перечеркнем их. Отметим жирной линией ED ; перечеркнем DK . Перечеркнем MO и MH ; отметим жирной линией MF ; перечеркнем



вершин, что и в G , дугам которого, соответствующим дугам из G , приписаны единичные веса, а остальным дугам – бесконечные веса. Если решение минимаксной задачи коммивояжера для G_1 имеет конечный вес (на самом деле равный единице), то в графе G может быть найден соответствующий гамильтонов цикл. Если же решение имеет бесконечный вес, то в графе G не существует никакого гамильтонова цикла. Следовательно, две указанные задачи можно рассматривать как эквивалентные, поскольку было продемонстрировано, что алгоритм нахождения гамильтонова цикла позволяет решать минимаксную задачу коммивояжера и наоборот.

5. Задачи по теории графов

Задача 5.1.

Как вы помните, охотник за мертвыми душами Павел Иванович Чичиков побывал у известных вам помещиков по одному разу у каждого. Он посещал их в следующем порядке: Манилова, Коробочку, Ноздрева, Собакевича, Плюшкина, Тенетникова, генерала Бетрищева, Петуха, Констанжогло, полковника Кошкарева. Найдена схема (рис.5.1), на которой Чичиков набросал взаимное расположение имений и проселочных дорог, соединяющих их. Установите, какое имение кому

Рис. 1. 23.

Так как $v(G) = 8 - 6 + 1 = 3$, то для получения остова удаляем из графа три ребра. Сопоставим этим ребрам номера 1, 2, 3.

Ребрам, входящим в остов, поставим в соответствие номера 4, 5, 6, 7, 8. Легко видеть, что фундаментальный цикл C_1 , соответствующий хорде 1, состоит из ребер 1, 4, 6, цикл C_2 – из ребер 2, 6, 7, цикл C_3 – из ребер 3, 6, 7, 8. Поэтому матрица фундаментальных циклов C имеет вид:

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{matrix}$$

1.15. Разрезы

Понятие разреза играет важную роль при изучении вопросов, связанных с отделением одного множества вершин графа от другого. Такие задачи возникают, например, при изучении потоков в сетях.

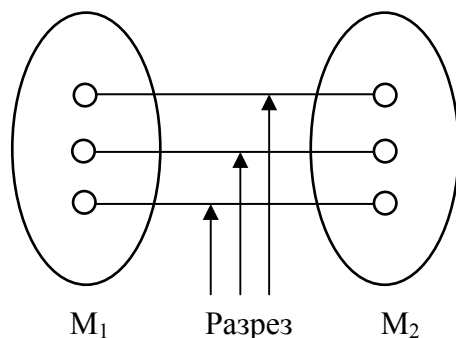
Определение 1.59. Сетью называется связный орграф $G = (M, R)$ без петель.

Определение 1.60. Поток в сети G называется функция $\mathcal{E}: R \rightarrow Z$, которая ставит в соответствие дуге некоторое число – вес дуги.

В этих задачах фундаментальную роль играют изучение поперечных сечений сети (т.е. множеств дуг, которые соединяют вершины двух непересекающихся множеств вершин) и нахождение ограниченного поперечного сечения, которое является самым узким местом. Эти узкие места определяют пропускную способность системы в целом.

Пусть $G = (M, R)$ – неорграф = $M \{M_1, M_2\}$ – разбиение множества M .

Определение 1.61. Разрезом графа G (по разбиению M) называется множество всех ребер, соединяющих вершины из M_1 с вершинами из M_2 (рис. 1.24). Отметим, что в связном графе любой разрез не пуст.



действительно эквивалентна минимаксной задаче коммивояжера.

В вышеупомянутом полном ориентированном графе G_1 мы можем наверняка найти гамильтонов цикл. Пусть это будет цикл Φ_1 , и пусть вес самой длинной его дуги равен 1. Удалив из G_1 любую дугу, вес которой не меньше 1, получим ориентированный граф G_2 . Найдем в ориентированном графе G_2 гамильтонов цикл Φ_2 , и пусть вес его самой длинной дуги равен 2. Удалим из G_2 любую дугу, вес которой не меньше 2, и так будем продолжать до тех пор, пока не получим ориентированный граф G_{m+1} , не содержащий никакого гамильтонова цикла. Гамильтонов цикл Φ_m в G_m (с весом m) является тогда по определению решением минимаксной задачи коммивояжера, так как из отсутствия гамильтонова цикла в G_{m+1} следует, что в G_1 не существует никакого гамильтонова цикла, не использующего по крайней мере одну дугу с весом, большим или равным m .

Таким образом, алгоритм нахождения гамильтонова цикла в ориентированном графе решает также минимаксную задачу коммивояжера. Наоборот, если мы располагаем алгоритмом решения последней задачи, то гамильтонов цикл в произвольном ориентированном графе G может быть найден с помощью построения полного ориентированного графа G_1 с тем же самым множеством

нимаются несколько грузовиков, хотя эту задачу можно также переформулировать как задачу коммивояжера большей размерности. Другие приложения включают составление расписания выполнения операций на машинах, проектирование электрических сетей, управление автоматическими линиями и т.д.

Очевидно, что сформулированная выше задача (1) является частным случаем задачи (2). В самом деле, приписывая случайным образом дугам заданного ориентированного графа G конечные веса, получаем задачу коммивояжера. Если решение для этой задачи, т.е. кратчайший гамильтонов цикл, имеет конечное значение, то это решение является гамильтоновым циклом ориентированного графа G (т.е. ответом на задачу 1). Если же решение имеет бесконечное значение, то G не имеет гамильтонова цикла.

С другой стороны можно дать еще одну интерпретацию задачи 1). Рассмотрим снова полный ориентированный граф G_1 с общей матрицей весов дуг $[c_{ij}]$ и рассмотрим задачу нахождения такого гамильтонова цикла, в котором самая длинная дуга минимальна. Эту задачу можно назвать минимаксной задачей коммивояжера. Тогда классическую задачу коммивояжера в той же терминологии можно было бы назвать минисуммной задачей коммивояжера. Покажем теперь, что задача (1)

Рис. 1.24.

Определение 1.62. Непустой разрез K неорграфа G называется *простым разрезом* или *коциклом*, если любое непустое собственное подмножество $K' \subsetneq K$ не является разрезом ни по какому разбиению.

Другими словами, из K нельзя удалить ни одно ребро с тем, чтобы полученное множество было непустым разрезом.

Пусть $G = (M, R)$ – неорграф, имеющий n вершин, m ребер и c компонент связности, T – остов графа G и u_1, \dots, u_{n-c} – ветви остова. Удаляя из остова T произвольную ветвь u_i , получаем лес с $(c+1)$ компонентами связности, т.е. каждое ребро u_i является разрезом остова T по некоторому разбиению $\{M_1, M_2\}$ (рис. 1.25).

В графе G могут найтись еще какие-то ребра $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_j}$ (являющиеся хордами T), которые соединяют вершины из M_1 и M_2 .

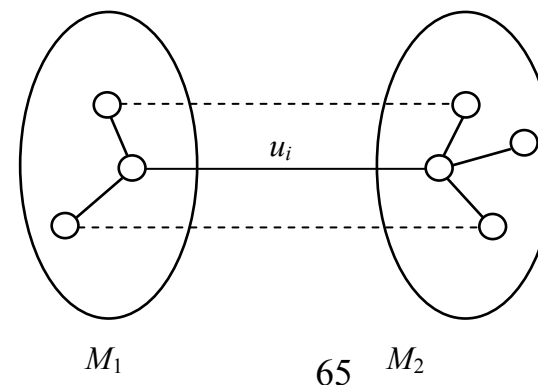


Рис. 1.25.

Определение 1.63. Множество $K_i = \{u_i, u_{i_1}, \dots, u_{i_j}\}$ образует простой разрез, который называется *фундаментальным разрезом* графа G относительно ветви u_i остова T .

Определение 1.64. Множество $\{K_1, K_2, \dots, K_{n-c}\}$ всех фундаментальных разрезов графа G называется *фундаментальным множеством коциклов* графа G относительно остова T .

Отметим, что мощность фундаментального множества коциклов не зависит от выбора остова T и равна корангу $\nu^*(G) = n - c$.

Каждому фундаментальному разрезу K_i ставится в соответствие вектор $\bar{b}_i = (\bar{b}_{i1}, \dots, \bar{b}_{im})$, определенный по правилу

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } w_j \in K_i \\ 0, & \text{если } w_j \notin K_i \end{cases}$$

Фундаментальное множество коциклов задается матрицей *фундаментальных разрезов* K , строки которой являются векторами $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_{\nu^*(G)}$:

Задача 1. Дан ориентированный граф G , требуется найти в G гамильтонов цикл (или все циклы), если существует хотя бы один такой цикл.

Задача 2. Дан полный ориентированный цикл G , дугам которого приписаны произвольные веса $C = [c_{ij}]$, найти такой гамильтонов цикл, который имеет наименьший общий вес. Следует отметить, что если ориентированный граф G не полный, то его можно рассматривать как полный ориентированный граф, приписывая отсутствующим дугам бесконечный вес.

Алгоритмы решения задачи коммивояжера и ее вариантов имеют большое число практических приложений в различных областях человеческой деятельности. Рассмотрим, например, задачу, в которой грузовик выезжает с центральной базы для доставки товаров данному числу потребителей и возвращается назад на базу. Стоимость перевозки пропорциональна пройденному грузовиком расстоянию, и при заданной матрице расстояний между потребителями маршрут с наименьшими транспортными затратами получается как решение соответствующей задачи коммивояжера. Аналогичные типы задач возникают при сборе почтовых отправок из почтовых ящиков, составлении графика движения школьных автобусов по заданным остановкам и т.д. Задача очень легко обобщается и на тот случай, когда доставкой (сбором) за-

сти n продуктов, используя единственный тип аппаратуры. Аппарат должен быть перенастроен после того как был произведен продукт p_i (но до того как начато производство продукта p_j), в зависимости от комбинации (p_i, p_j) . Стоимость перенастройки аппаратуры постоянна и не зависит от производимых продуктов. Предположим, что эти продукты производятся в непрерывном цикле, так что после производства последнего из n продуктов снова возобновляется в том же фиксированном цикле производство первого продукта.

Возникает вопрос о том, может ли быть найдена циклическая последовательность производства продуктов p_i ($i = 1, 2, \dots, n$), не требующая перенастройки аппаратуры. Если представить эту задачу в виде ориентированного графа, то ответ на поставленный вопрос зависит от того, имеет ли этот ориентированный граф гамильтонов цикл или нет.

Если не существует циклической последовательности продуктов, не требующей перенастройки аппаратуры, то какова должна быть последовательность производства с наименьшими затратами на перенастройку, т.е. требующая наименьшего числа необходимых перенастроек?

Таким образом, рассмотрим следующие две задачи.

$$K = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{v^*(G),1} & b_{v^*(G),2} & \dots & b_{v^*(G),m} \end{pmatrix}$$

Поскольку каждый фундаментальный разрез K_i содержит ровно одну ветвь, а именно u_i , матрица K имеет вид

$$K = \left(\begin{array}{ccc|ccc} b_{11} & \dots & b_{1,v^*(G)} & 1 & & 0 \\ b_{21} & \dots & b_{2,v^*(G)} & & 1 & \\ \dots & \dots & \dots & & & \dots \\ b_{v^*(G),1} & \dots & b_{v^*(G),v^*(G)} & 0 & & 1 \end{array} \right)$$

Таким образом, $K = (K_1 \mid K_2)$, где K_2 – единичная матрица порядка $v^*(G)$. Отметим, что если $C = (C_1 \mid C_2)$ – соответствующая матрица фундаментальных циклов, то $K_1 = C_2^T$, где C_2^T – транспонированная матрица C_2 .

Пример 1.31.

Найдем матрицу фундаментальных разрезов графа $G = (M, R)$, изображенного на рис. 1.25. Поскольку $v^*(G) = 6 - 1 = 5$, имеется пять фундаментальных разрезов. Ребру 4 соответствует коцикл $K_1 = \{1, 4\}$, так как при удалении ребра 4 из остова T множество вершин M разбивается на две части: $\{a_1\}$ и $M \setminus \{a_1\}$, а ребра 1 и 4 образуют разрез по

разбиению $\{\{a_1\}, M \setminus \{a_1\}\}$. Аналогично ребру 5 соответствует коцикл $K_2 = \{5\}$, ребру 6 – коцикл $K_3 = \{1, 2, 3, 6\}$, ребру 7 – коцикл $K_4 = \{2, 3, 7\}$, ребру 8 – коцикл $K_5 = \{3, 8\}$. Следовательно, матрица фундаментальных разрезов имеет вид

$$\begin{matrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \\ K_5 \end{matrix} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

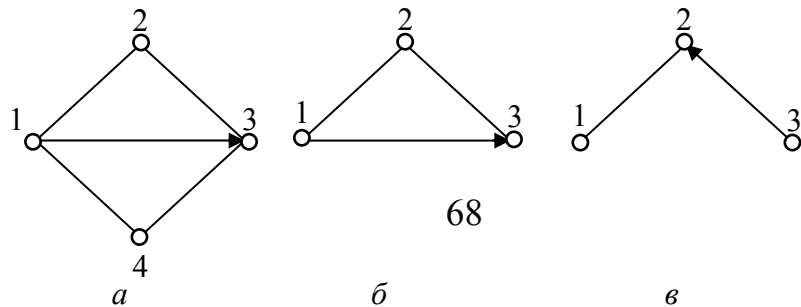
1.16. Операции над графами

Пусть $G' = (M', R')$ является подграфом графа $G = (M, R)$, то есть $M' \not\subset M$ и $R' \not\subset (M')^2$.

Определение 1.65. Граф G' называется *частью* графа G , если $M' \not\subset M$ и $R' \not\subset R \not\subset (M')^2$.

Пример 1.32.

Граф $G' = (\{1, 2, 3\}; [1, 2] \not\Rightarrow [2, 3] \not\Rightarrow \{(1, 3)\})$ (рис. 1.26 б) является подграфом графа $G = (\{1, 2, 3, 4\}; [1, 2] \not\Rightarrow [1, 4] \not\Rightarrow [2, 3] \not\Rightarrow [3, 4] \not\Rightarrow \{(1, 3)\})$ (рис. 1.26 а), а граф $G'' = (\{1, 2, 3\}; [1, 2] \not\Rightarrow \{(3, 2)\})$ (рис. 1.26 в) – частью графа G .



Так же можно «склеивать» различные контуры фактора. Рассмотрим вновь задачу о шахматном коне. Благодаря симметрии шахматной доски получается фактор. Клетки, помеченные одинаковыми буквами, образуют контур. Два контура можно объединить тогда и только тогда, когда две последовательные вершины одного соответственно смежны с двумя последовательными вершинами другого. Различные соединения показаны при помощи вспомогательного графа. Вспомогательный граф имеет очевидный гамильтонов путь aDbCdAcB (рис. 4.7).

a	b	c	d	a	b	c	d
c	d	a	b	c	d	a	b
b	a	A	B	C	D	d	c
d	c	C	D	A	B	b	a
a	b	B	A	D	C	c	d
c	d	D	C	B	A	a	b
b	a	d	c	b	a	d	c
d	c	b	a	d	c	b	a

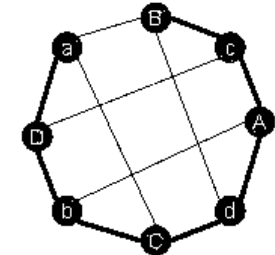


Рис. 4.7.

4. 5. Задачи, связанные с поиском гамильтоновых циклов

В ряде отраслей промышленности возникает следующая задача планирования. Нужно произве-

Теорема 4.3. (Кенига-Холла (Konig D., Hall P.)) Паросочетание, отображающие V в U , существует тогда и только тогда, когда $|EW| \geq |W|$ для любого множества $W \subseteq V$.

Следствие: Пусть (V, U, E) – простой граф, а $m = \max \{|Ev|, |E^{-1}u| : v \in V, u \in U\}$,

тогда всегда существует паросочетание, использующее все те вершины v , для которых $|Ev| = m$, и все те вершины u , для которых $|E^{-1}u| = m$.

Теорема 4.4. Необходимое и достаточное условие существования фактора у графа (V, E) состоит в том, чтобы $|EW| \geq |W|$ при всех $W \subseteq V$.

Следствие: Если граф (V, E) таков, что $|Ev| = |E^{-1}v| = m$

для любой вершины v , то дуги этого графа можно распределить по m непересекающимся множествам W_1, W_2, \dots, W_m , каждое из которых образует фактор.

Отыскание фактора является несложным делом, поскольку это есть задача о наибольшем потоке. Метод нахождения гамильтонова контура состоит в нахождении всех факторов графа и сохранении только тех из них, которые состоят из единственного контура.

Рассмотрим некоторые основные операции, производимые над графами.

Определение 1.66. Операцией добавления к графу $G = (M, R)$ вершины a образуется граф $\{M \hat{\cup} \{a\}, R\}$.

Определение 1.67. Операция добавления дуги (a, b) к графу G состоит в образовании графа $(M \hat{\cup} \{a, b\}, R \hat{\cup} \{(a, b)\})$.

Определение 1.68. Под операцией удаления дуги (a, b) из графа G понимается операция, заключающаяся в удалении пары (a, b) из множества дуг R в результате получается граф $\{M, R \setminus \{(a, b)\}\}$.

Определение 1.69. Операция удаления вершины a из графа G заключается в удалении вершины a вместе с инцидентными ей дугами:

$$(M \setminus \{a\}, R \setminus \{(b, c) \mid b = a \text{ или } c = a\}).$$

Определение 1.70. Операция отождествления вершин a и b графа $G = (M, R)$ состоит в удалении из графа G вершин a и b и присоединении новой вершины a' , дуг (a', c) , если $(a, c) \in R$ или $(b, c) \in R$, и дуг (c, a') , если $(c, a) \in R$, или $(c, b) \in R$:

$((M \setminus \{a, b\}) \not\cong \{a'\}; (R \setminus \{(c, d) \mid c = a, \text{ или } d = a, \text{ или } c = b, \text{ или } d = b\}) \not\cong \{(a', c) \mid (a, c) \in R, \text{ или } (b, c) \in R\} \not\cong \{(c, a') \mid (c, a) \in R, \text{ или } (c, b) \in R\})$.

Говорят, что построенный *граф* получается из графа G отождествлением вершин a и b . В случае, когда a и b соединены дугой, операцию отождествления вершин a и b называют *стягиванием дуги* (a, b) .

Пример 1.33.

Из графа G , показанного на рис. 1.27, добавлением вершины 5 образуется граф G_1 , добавлением дуги $(3, 1)$ – граф G_2 , удалением дуги $(3, 2)$ – граф G_3 , удалением вершины 2 – граф G_4 , отождествлением вершин 1 и 4 – граф G_5 , стягиванием дуги $(2, 3)$ – граф G_6 .

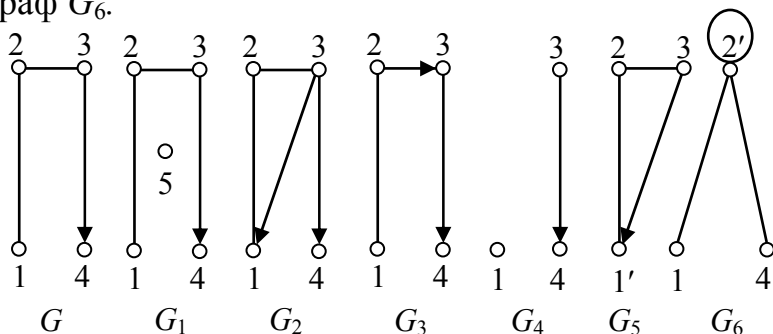


Рис. 1.27.

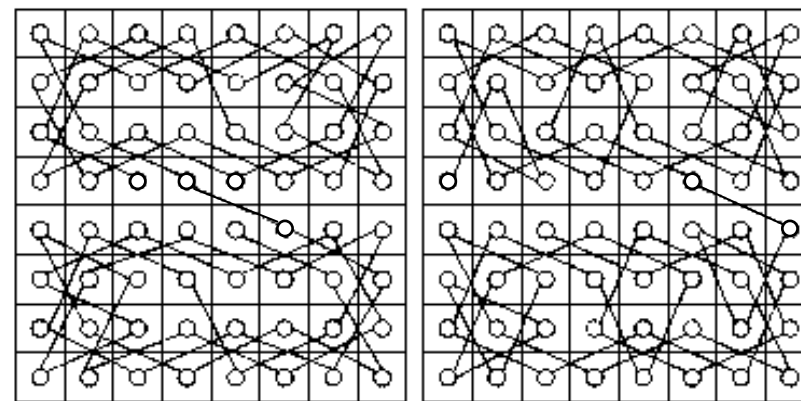
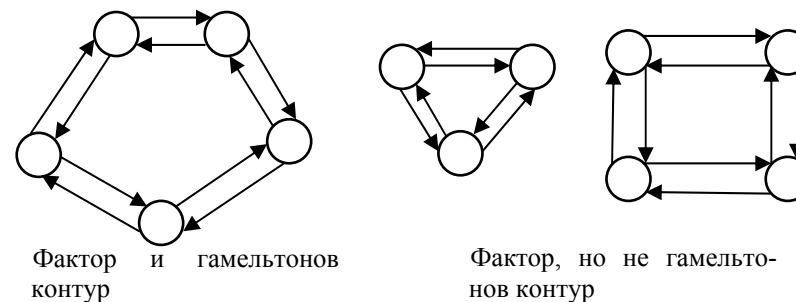


Рис. 4.5.

4.4. Факторы

Определение 4.5. *Фактором* графа (V, E) называется частичный граф (V, E_0) , в котором каждая вершина обладает полустепенями исхода и захода, равными 1.

Всякий гамильтонов контур является фактором, но обратное неверно, ибо фактор может состоять из нескольких контуров без общих вершин (рис. 4.6).



$$(a_k, x) \cdot E \cdot (x, a_{k+1}) \cdot E \cdot (a_{k+1}, x) \cdot E.$$

Если не существует пути $m_0 = xa_1 \dots a_p$, то $(a_1, x) \cdot E \cdot (a_2, x) \cdot E, (a_p, x) \cdot E$, и путь $m_p = a_1 \dots a_p x$ существует, вопреки допущению. Таким образом, можно шаг за шагом построить путь, содержащий все вершины графа. \square

Примечание: Из этого результата вытекает, что всегда возможно упорядочить множество участников турнира таким образом, чтобы каждый предшествующий был победителем непосредственно следующего (если, конечно, ни одна из встреч не заканчивается ничьей).

4.3. Задача о шахматном коне

Поставим задачу обойти конем шахматную доску так, что побывать в каждой клетке ровно по одному разу. Эта задача интересовала многих математиков, особенно Эйлера (Euler L.), де Муавра (de Moivre), Вандермонда (Vandermonde) и др.

Правило, которое, видимо, оправдывается на практике, но еще не подтверждено теоретически состоит в следующем: всякий раз ходим конем туда, откуда он угрожает наименьшему числу еще не пройденных клеток.

Другой способ состоит в нахождении маршрута по половине доски, симметричном дублировании его и соединении обоих маршрутов (рис. 4.5).

Определение 1.71. Дополнением графа без петель $G = (M, R)$ называется граф $\bar{G} = (M, M^2 \setminus (R \hat{\cup} id_M))$.

Пример 1.34.

Дополнением графа G , изображенного на рис. 1.27, является граф \bar{G} , показанный на рис. 1.28.

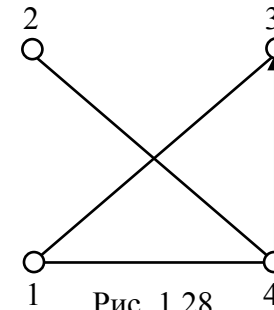


Рис. 1.28.

Пусть $G_1 = (M_1, R_1)$, $G_2 = (M_2, R_2)$ – графы.

Определение 1.72. Объединением графов $G_1 \hat{\cup} G_2$ называется граф $(M_1 \hat{\cup} M_2, R_1 \hat{\cup} R_2)$.

Определение 1.73. Если $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$, то пересечением графов $G_1 \hat{\cap} G_2$ называется граф $(M_1 \hat{\cap} M_2, R_1 \hat{\cap} R_2)$.

Определение 1.74. Кольцевой суммой графов $G_1 \hat{\bowtie} G_2$ называется граф $(M_1 \hat{\bowtie} M_2, R_1 \hat{\bowtie} R_2)$, где

$$R_1 \hat{\bowtie} R_2 = (R_1 \setminus R_2) \hat{\cup} (R_2 \setminus R_1)$$

Пример 1.35.

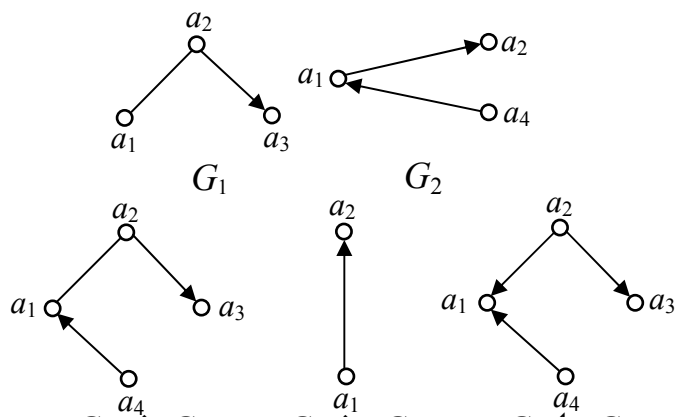
Для графов $G_1 = (\{a_1, a_2, a_3\}; \{[a_1, a_2] \nrightarrow \{(a_2, a_3)\}\})$ и $G_2 = (\{a_1, a_2, a_4\}; \{(a_1, a_2), (a_4, a_1)\})$ (рис. 1.29) найти $G_1 \nrightarrow G_2$, $G_1 \nleftarrow G_2$, $G_1 \nleftrightarrow G_2$.

По определению имеем:

$G_1 \nrightarrow G_2 = (\{a_1, a_2, a_3, a_4\}; \{[a_1, a_2] \nrightarrow \{(a_2, a_3), (a_4, a_1)\}\})$,

$G_1 \nleftarrow G_2 = (\{a_1, a_2\}; \{(a_1, a_2)\})$,

$G_1 \nleftrightarrow G_2 = (\{a_1, a_2, a_3, a_4\}; \{(a_2, a_1), (a_2, a_3), (a_4, a_1)\})$.



Определение 1.75. Соединением графов $G_1 + G_2$ называется граф $(M_1 \cup M_2, R_1 \cup R_2 \cup \{[a, b] | a \in M_1, b \in M_2, a \neq b\})$.

Пример 1.36.

Даны графы G_1 и G_2 , показанные на рис. 1.30 а, найти соединением $G_1 + G_2$.

Соединением $G_1 + G_2$ является граф, представленный на рис. 1.30 б.

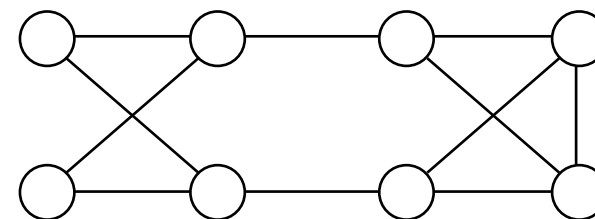
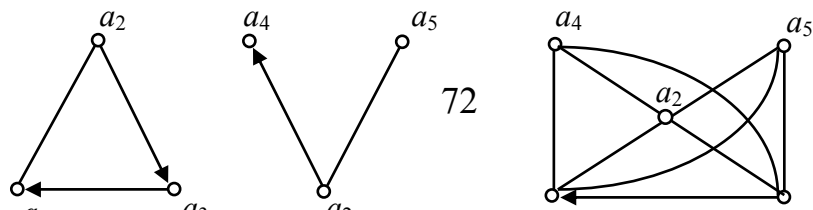


Рис. 4.4.

Ограничивая условия теоремы Поша, получаем более простые, но менее сильные достаточные условия, найденные Оре и Дираком соответственно:

Следствие 1. Если $p \geq 3$ и $\deg u + \deg v \geq p$ для любой пары u и v несмежных вершин графа G , то G – гамильтонов граф.

Следствие 2. Если $p > 3$ и $\deg v \geq p / 2$ для любой вершины v графа G , то G – гамильтонов граф.

Теорема 4.2. В полном графе $G(V, E)$ всегда существует гамильтонов путь.

Доказательство.

Пусть $t = a_1 a_2 \dots a_p$ – путь длины $p - 1$, причем все вершины в t различны. x – вершина $\notin t$. Покажем, что можно составить путь вида

$$t_k = a_1 \dots a_k x a_{k+1} \dots a_p$$

Пусть не существует такого целого числа k , заключенного между 1 и p , что

$$(a_k, x) \in E, (x, a_{k+1}) \in E.$$

Имеем, следовательно, для $1 \leq k \leq p$:

должно быть более чем t вершин со степенями, превосходящими t , и, следовательно, не меньшим, чем $p / 2$. В результате найдется некоторая вершина, скажем v_p , степени по крайней мере $p / 2$, не смежная с v_1 . Так как v_1 и v_p не смежны, то существует остовная простая цепь $v_1 \dots v_p$. Как и выше, обозначим через v_{i1}, \dots, v_{im} вершины графа G , смежные с v_1 , и заметим, что вершина v_p не может быть смежной ни с одной из t вершин v_{ij-1} для $1 < j \leq t$. Но поскольку v_1 и v_p не смежны, а v_p имеет степень не меньше $p / 2$, то, как было показано в первой части доказательства, t должно быть меньше чем $(p - 1) / 2$. Так как по предположению число вершин, со степенями, не превосходящими t , меньше чем t , то хотя бы одна из t вершин v_{ij-1} , скажем u , должна иметь степень не меньше $p / 2$. Итак, мы установили, что степени двух несмежных вершин v_p и u не меньше $p / 2$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. \square

Приведенное достаточное условие не является необходимым. Кубический граф, изображенный на рис. 4.4, гамильтонов, хотя ясно, что он не удовлетворяет условиям теоремы. Однако условия теоремы неумлучшаемы, поскольку при их ослаблении новое условие уже не будет достаточным для гамильтоновости графа.

Рис. 1.30

Определение 1.76. Произведением графов $G_1 \times G_2$ называется граф $(M_1 \times M_2, R)$, в котором $((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in R$ тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$ и $(b_1, b_2) \in R_2$, или $b_1 = b_2$ и $(a_1, a_2) \in R_1$.

Пример 1.37.

Изобразите произведение $G_1 \times G_2$ графов

$G_1 = (\{1, 2\}; \{(1, 1), (2, 1)\})$ и

$G_2 = (\{a, b, c\}; [a, b] \rightarrow \{(b, c)\})$

На рис. 1.31 изображено произведение данных графов.

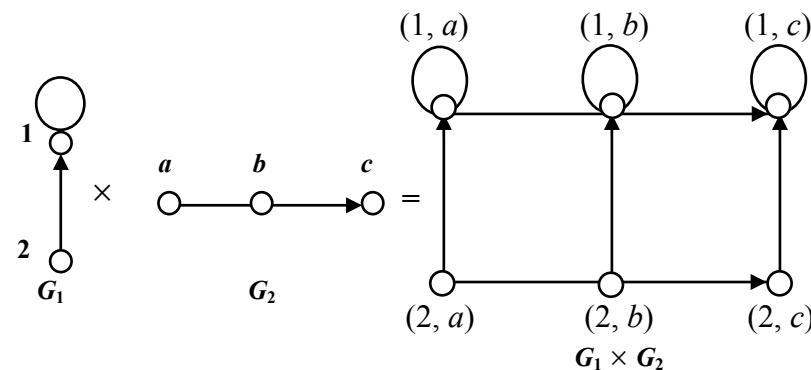


Рис. 1.31.

С помощью операции произведения определим по индукции важный класс графов, называемых n -мерными кубами (n -кубами). Рассмотрим граф K_2 , вершины которого обозначим 0 и 1. n -Мерный куб, или n -куб Q_n , определяется по следующим правилам: Q_0 – граф без петель, состоящий из одной вершины, $Q_1 = K_2$, $Q_n = K_2 \times Q_{n-1}$, $n > 1$. Вершинами n -мерного куба Q_n являются всевозможные n -ки, состоящие из нулей и единиц (всего таких наборов 2^n), а ребра задаются по следующему правилу: вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие кортежи различаются ровно одной координатой. На рис. 1.32 показаны двумерный Q_2 и трехмерный Q_3 кубы.

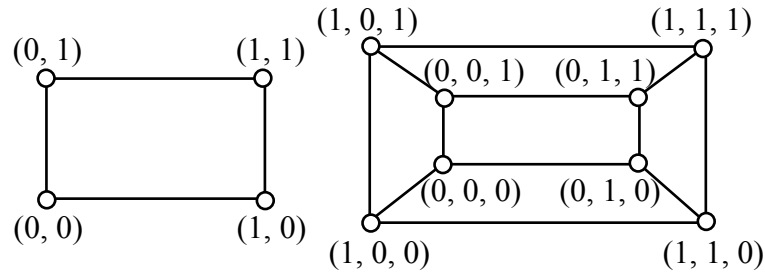


Рис. 1.32.

Определение 1.77. Композицией $G_1 [G_2]$ графов G_1 и G_2 называется граф $(M_1 \times M_2, R)$, в котором

из G вида v_{ij-1} , поскольку тогда в G был бы гамильтонов цикл $v_1 v_2 \dots v_{ij-1} v_p v_{p-1} \dots v_{ij} v_1$ (рис. 4.3).

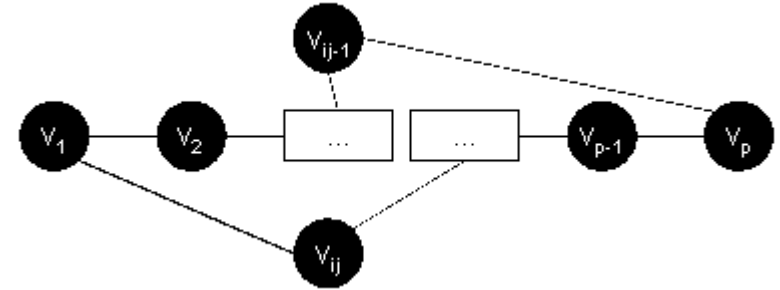


Рис. 4.3.

Далее, так как $n \geq (p-1)/2$, то $p/2 \leq \deg v_p \leq p-1-n < p/2$, что невозможно. Поэтому v_1 и v_p должны быть смежны.

Отсюда следует, что если $\deg v \geq p/2$ для всех вершин v , то G – гамильтонов граф. (Ниже это сформулировано в виде следствия 2.) В силу изложенного выше каждая пара вершин графа G смежна, т.е. G – полный граф. Мы пришли к противоречию, поскольку полный граф является гамильтоновым для всех $p \leq 3$.

Таким образом, в G – есть вершина v с $\deg v < p/2$. Обозначим через t наибольшую среди степеней всех таких вершин. Выберем такую вершину v_1 , что $\deg v_1 = t$. По принятому предположению число вершин со степенями, не превосходящими t , не больше чем $t < p/2$, поэтому

Доказательство.

Предположим, что теорема неверна, и пусть G – максимальный негамильтонов граф с p вершинами, удовлетворяющий условиям теоремы. Легко видеть, что добавление любого ребра в граф, обладающий указанными в теореме свойствами, приводит к графу, который так же обладает этими свойствами. Таким образом, поскольку добавление к G произвольного ребра приводит к гамильтонову графу, любые две несмежные вершины соединимы простой остовной (содержащей все вершины графа) цепью.

Покажем сначала, что всякая вершина, степень которой не меньше $(p - 1) / 2$, смежна с каждой вершиной со степенью, большей чем $(p - 1) / 2$. Допустим (не теряя общности), что $\deg v_1 \geq (p - 1) / 2$ и $\deg v_p \geq p / 2$, но вершины v_1 и v_p не смежны. Тогда существует простая остовная цепь $v_1 v_2 \dots v_p$, соединяющая v_1 и v_p (рис. 4.2).

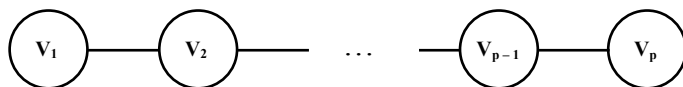


Рис. 4.2.

Обозначим вершины, смежные с v_1 , через v_{i1}, \dots, v_{in} , где $n = \deg v_1$ и $2 = i_1 < i_2 < \dots < i_n$. Ясно, что вершина v_p не может быть смежной ни с одной вершиной

$((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \not\supset R$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

- 1) $(a_1, a_2) \not\supset R_1$;
- 2) $a_1 = a_2$ и $(b_1, b_2) \not\supset R_2$.

1.17. Внутренняя и внешняя устойчивость графа

Пусть задан некоторый граф $G = (M, R)$.

Определение 1.78. Подмножество вершин $S \not\supset M$, в котором две любые точки являются несмежными, называется *внутренне устойчивым*.

Обозначим $|S|$ – мощность множества S . Пусть F – множество всех внутренне устойчивых множеств.

Определение 1.79. Числом внутренней устойчивости графа G называется

$$\alpha(G) = \max_{S \in F} |S|$$

Отыскание $\alpha(G)$ нужно начинать с максимального числа вершин и, постепенно увеличивая его, проверять, образуют ли выбранные вершины внутренне устойчивое множество.

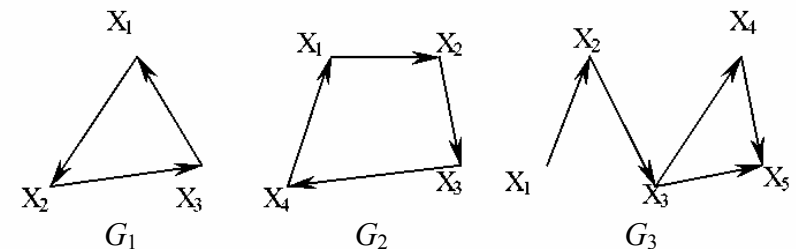


Рис. 1.33.

Для графов, изображенных на рис. 1.33, имеем следующие числа внутренней устойчивости. $\alpha(G_1)=1$, т.к. любая пара вершин G_1 является смежной. Граф G_2 имеет два внутренне устойчивых множества

$$S_1 = \{x_1, x_3\}, S_2 = \{x_4, x_2\}.$$

Так как, $|S_1| = |S_2| = 2$, то, следовательно, $\alpha(G_2) = 2$. Граф G_3 содержит внутренне устойчивые множества

$$S_1 = \{x_1, x_5\}, S_2 = \{x_1, x_3\}, S_3 = \{x_1, x_4\},$$

$$S_4 = \{x_2, x_5\}, S_5 = \{x_2, x_4\}.$$

Но если к любому из этих множеств добавить какую-либо вершину, не содержащуюся в нем, то подмножество перестанет быть внутренне устойчивым, следовательно, $\alpha(G_3) = 2$.

Определение 1.80. Подмножество вершин $T \not\subseteq M$ есть *внешне устойчивое* множество, если для каждой точки $x_i \in (M \setminus T)$ выполнено условие

$$G(x_i) \cap T = \emptyset,$$

где $G(x_i)$ – множество дуг, порожденных точкой x_i .

Обозначим $|T|$ – мощность множества T . Пусть Φ – множество всех внешне устойчивых множеств.

Определение 1.81. Числом внешней устойчивости графа G называется

Отметим, что придумано еще много других развлекательных и полезных задач, связанных с поиском гамильтоновых циклов. Сформулируем две из них.

1. *Задача про банкет.* Компанию из нескольких человек требуется рассадить за круглым столом таким образом, чтобы по обе стороны от каждого сидели его знакомые. Очевидно, для решения этой задачи нужно найти гамильтонов цикл в графе знакомств компании.
2. *Задача о шахматном коне.* Можно ли, начиная с произвольного поля шахматной доски, обойти конем последовательно все 64 поля по одному разу и вернуться в исходное поле? (решение будет рассмотрено ниже).

Следующая теорема, доказанная Поша (Posa L.), дает достаточное условие того, что неориентированный граф является гамильтоновым. Она обобщает результаты, полученные ранее Оре (Ore O.) и Дираком (Dirac G.A.), которые приводятся здесь в виде следствий.

4.2. Основные теоремы и их следствия

Теорема 4.1. Пусть G имеет $p \geq 3$ вершин. Если для всякого n , $1 \leq n \leq (p-1)/2$, число вершин со степенями, не превосходящими n , меньше чем n , и для нечетного p число вершин степени $(p-1)/2$ не превосходит $(p-1)/2$, то G – гамильтонов граф.

шинам v_1, \dots, v_p графа G добавить вершины u_1, \dots, u_p и множество ребер $\{(v_i, u_i)\} [pic] \{(u_i, v_{i+1})\}$.

Степенью вершины v называется число ребер $d(v)$, инцидентных ей, при этом петля учитывается дважды. В случае ориентированного графа различают степень $do(v)$ по выходящим дугам и $di(v)$ – по входящим.

Указанные названия цепей и циклов связаны с именем Уильяма Гамильтона (Hamilton W.), который в 1859 году предложил следующую игру-головоломку: требуется, переходя по очереди от одной вершины додекаэдра к другой вершине по его ребру, обойти все 20 вершин по одному разу и вернуться в начальную вершину (рис. 4.1).

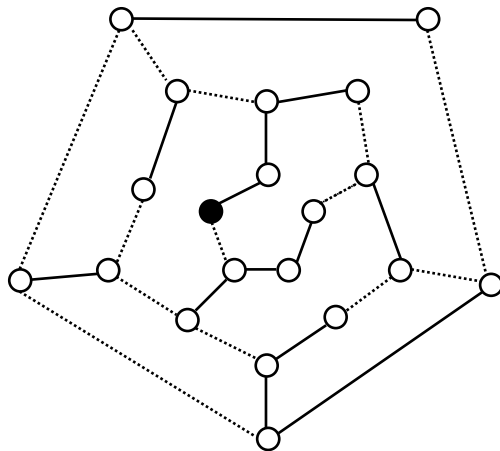


Рис. 4.1.

$$\beta(G) = \min_{T \subseteq \Phi} |T|$$

При подсчете числа внешней устойчивости следует начинать с максимального числа вершин графа, затем уменьшать его, проверяя, образуют ли выбранные вершины внешне устойчивое множество.

Пример 1.38.

Определим число внешней устойчивости для графов, изображенных на рис. 1.33. Любая пара вершин графа G_1 образует внешне устойчивое множество, но любая его вершина не является внешне устойчивым множеством, следовательно, $\mathcal{Q}(G_1) = 2$. Граф G_2 содержит два внешне устойчивых множества $T_1 = \{x_1, x_3\}$, $T_2 = \{x_2, x_4\}$ с минимальным числом элементов, т.е. $\mathcal{Q}(G_2) = 2$. Для графа G_3 внешне устойчивым множеством минимальной мощности является $T = \{x_2, x_5\}$, т.е. $\mathcal{Q}(G_3) = 2$.

К определению числа внешней устойчивости графа сводится задача о часовых. На посту расставлены часовые, охраняющие n объектов, причем один и тот же часовой может наблюдать за несколькими объектами. Нужно выяснить, каково минимальное число часовых, необходимых для наблюдения за всеми объектами. Граф, изображенный на рис. 1.34, соответствует следующей задаче: 9 вершин графа – охраняемые объекты

($n = 9$), ребра характеризуют возможность просмотра объектов часовыми. Так, например, часовой у объекта X_1 может одновременно наблюдать за объектами X_2, X_3, X_4, X_6, X_9 , часовой у объекта X_2 – за объектами X_1, X_3, X_7, X_8 и т.д. Для данного графа число внешней устойчивости равно 2. Внешне устойчивое множество образуют вершины X_4, X_8 . Достаточно двух часовых, расположенных в точках X_4 и X_8 , для охраны всех объектов.

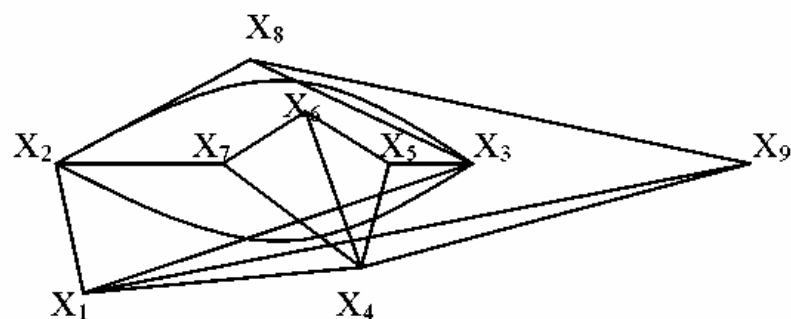


Рис 1.34.

2. Основные теоремы теории графов

Теорема 2.1. Удвоенная сумма степеней вершин любого графа равна числу его ребер.

Доказательство.

Пусть $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ – вершины данного графа, а $p(A_1), p(A_2), \dots, p(A_n)$ – степени этих вер-

двух параллельных ребер между любыми двумя вершинами, т.е. оптимальный цикл не проходит ни по какому ребру графа G более чем два раза.

4. Гамильтоновы циклы

4.1 Основные определения

Определение 4.1. Гамильтоновой цепью графа называется его простая цепь, которая проходит через каждую вершину графа точно один раз.

Определение 4.2. Цикл графа, проходящий через каждую его вершину, называется гамильтоновым циклом.

Определение 4.3. Граф называется гамильтоновым, если он обладает гамильтоновым циклом.

Определение 4.4. Граф, который содержит простой путь, проходящий через каждую его вершину, называется полугамильтоновым.

Это определение можно распространить на ориентированные графы, если путь считать ориентированным. Гамильтонов цикл не обязательно содержит все ребра графа. Ясно, что гамильтоновым может быть только связный граф и, что всякий гамильтонов граф является полугамильтоновым. Заметим, что гамильтонов цикл существует далеко не в каждом графе.

Замечание: Любой граф G можно превратить в гамильтонов граф, добавив достаточное количество вершин. Для этого, например, достаточно к вер-

x_α в x_β), соответствующую весу $d_{\alpha\beta}$, делая шаг 1. Добавим искусственные ребра в G , соответствующие ребрам из $\mu_{\alpha\beta}$, и продelaем это для всех других цепей из множества M^* , в результате чего получится граф $G^-(M^*)$.

4. Сумма весов всех ребер графа $G^-(M^*)$, найденная с использованием матрицы $[c_{ij}]$ (вес искусственного ребра берется равным весу параллельного ему реального ребра), равна минимальному весу цикла, проходящего по G . При этом число прохождений цикла по ребру (x_i, x_j) равно общему числу параллельных ребер между x_i и x_j в $G^-(M^*)$.

Покажем, что указанный выше алгоритм строит минимальный цикл. Для этого следует заметить, что поскольку на шаге 2 мы используем минимальное паросочетание, никакие две кратчайшие цепи μ_{ij} и μ_{pq} при таком паросочетании (скажем, идущие из x_i в x_j и из x_p в x_q) не могут иметь общего ребра. Если бы они имели общее ребро (x_a, x_b) , то сочетание вершин x_i и x_q (использующее подцепи от x_i к x_b и от x_b к x_q) и сочетание пары вершин x_p и x_j (использующее подцепи от x_p к x_a и от x_a к x_j) давало бы общее паросочетание веса $2c_{ab}$, меньшего чем вес первоначального паросочетания, что противоречит предположению о минимальности исходного паросочетания. Следовательно, граф $G^-(M^*)$ не должен содержать более

шин. Подсчитаем число ребер, сходящихся в каждой вершине, и просуммируем эти числа. Это равносильно нахождению суммы степеней всех вершин. При таком подсчете каждое ребро будет учтено дважды (оно ведь всегда соединяет две вершины).

Отсюда следует:

$$p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_n) = 0,5N,$$

или

$$2(p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_n)) = N,$$

где N – число ребер. \square

Теорема 2.2. Число нечетных вершин любого графа четно.

Доказательство.

Пусть $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ – это степени четных вершин графа, а $b_1, b_2, b_3, \dots, b_m$ – степени нечетных вершин графа. Сумма

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k + b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_m$$

ровно в два раза превышает число ребер графа.

Сумма $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k$ четная (как сумма четных чисел), тогда сумма

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_m$$

должна быть четной. Это возможно лишь в том случае, если m – четное, то есть четным является и число нечетных вершин графа. Что и требовалось доказать. \square

Следствие 1. Нечетное число знакомых в любой компании всегда четно.

Следствие 2. Число вершин многогранника, в которых сходится нечетное число ребер, четно.

Следствие 3. Число всех людей, когда-либо пожавших руку другим людям, нечетное число раз, является четным.

Теорема 2.3. Во всяком графе с n вершинами, где n больше или равно 2, всегда найдутся две или более вершины с одинаковыми степенями.

Доказательство.

Если граф имеет n вершин, то каждая из них может иметь степень 0, 1, 2, ..., $(n - 1)$. Предположим, что в некотором графе все его вершины имеют различную степень, то есть, и покажем, что этого быть не может. Действительно, если $p(A) = 0$, то это значит, что A – изолированная вершина, и поэтому в графе не найдется вершины X со степенью $p(X) = n - 1$. В самом деле, эта вершина должна быть соединена с $(n - 1)$ вершиной, в том числе и с A , но ведь A оказалась изолированной. Следовательно, в графе, имеющем n вершин, не могут быть одновременно вершины степени 0 и $(n - 1)$. Это значит, что из n вершин найдутся две, имеющие одинаковые степени. \square

Теорема 2.4. Если в графе с n вершинами (n больше или равно 2) только одна пара имеет одинако-

из $G^-(M)$ должно проходиться один раз, то теорема доказана.

Алгоритм решения задачи китайского почтальона немедленно следует из доказанной теоремы, так как все, что для этого необходимо, состоит в нахождении множества цепей M^* (цепного паросочетания для множества вершин нечетной степени), дающего наименьший дополнительный вес. Цикл наименьшего веса, проходящий по G , будет иметь вес, равный сумме весов всех ребер из G плюс сумма весов ребер в цепях из M^* . Это то же самое, что и сумма весов всех ребер – реальных и искусственных – графа $G^-(M^*)$.

Описание алгоритма решения задачи китайского почтальона

1. Пусть $[c_{ij}]$ – матрица весов ребер G . Используя алгоритм нахождения кратчайшей цепи, образуем $|X^-| * |X^-|$ – матрицу $D = [d_{ij}]$, где d_{ij} – вес цепи наименьшего веса, идущей из некоторой вершины $x_i \in X^-$ в другую вершину $x_j \in X^-$.
2. Найдем то цепное паросочетание M^* для множества X^- , которое дает наименьший вес (в соответствии с матрицей весов D). Это можно сделать эффективно с помощью алгоритма минимального паросочетания.
3. Если вершина x_α сочетается с другой вершиной x_β , то определим цепь $\mu_{\alpha\beta}$ наименьшего веса (из

Если цикл проходит по графу G , то, по крайней мере, одно ребро, инцидентное каждой вершине x_i нечетной степени, должно проходиться дважды. (Ребро, проходимое дважды, можно рассматривать как два параллельных ребра – одно реальное и одно искусственное – и каждое из них проходится один раз). Пусть это ребро (x_i, x_k) . В случае нечетности степени d_k вершины x_k графа G добавление искусственного ребра, прежде всего, сделает d_k четным, и значит только ребро (x_i, x_k) нужно будет проходить дважды, если ограничиться рассмотрением лишь вершин x_i и x_k . В случае, когда d_k четно, добавление искусственного ребра сделает d_k нечетным, а второе ребро, выходящее из x_k , должно быть пройдено дважды (т.е. добавляется еще одно искусственное ребро). Такая ситуация сохраняется до тех пор, пока не встретится вершина нечетной степени, о чем говорилось выше. Следовательно, чтобы удовлетворить условию возвращения в вершину x_i , нужно дважды пройти всю цепь из x_i в некоторую другую вершину нечетной степени $x_r \in X^-$. Это автоматически приводит к выполнению условия прохождения вершины x_r . Аналогично обстоит дело для всех других вершин $x_i \in X^-$. Это значит что все множество M цепей из G , определенное выше, должно проходиться дважды, и так как отсюда вытекает, что каждое ребро

вую степень, то в этом графе всегда найдется, либо единственная изолированная вершина, либо единственная вершина, соединенная со всеми другими.

Содержание этой теоремы хорошо разъясняется задачей: группа, состоящая из n школьников, обменивается фотографиями. В некоторый момент времени выясняется, что двое совершили одинаковое число обменов. Доказать, что среди школьников есть либо один еще не начинавший обмена, либо один уже завершивший его.

Теорема 2.5. Если у графа все простые циклы четной длины, то он не содержит ни одного цикла четной длины.

Суть теоремы в том, что на этом графе невозможно найти цикл (как простой, так и непростой) нечетной длины, то есть содержащий нечетное число ребер.

Теорема 2.6. Для того, чтобы граф был эйлеровым, необходимо и достаточно, чтобы он был связным и все его вершины имели четную степень.

Теорема 2.7. Для того чтобы на связном графе можно было бы проложить цепь AB , содержащую все его ребра в точности по одному разу, необходимо и достаточно, чтобы A и B были единственными нечетными вершинами этого графа.

Доказательство.

Для доказательства к исходному графу присоединяем ребро (A, B) ; после этого все вершины графа станут четными. Этот новый граф удовлетворяет всем условиям теоремы 2.6, и поэтому в нем можно проложить эйлеров цикл Ψ . И если теперь в этом цикле удалить ребро (A, B) , то останется искомая цепь AB . \square

На этом приеме основано доказательство следующей теоремы, которую следует считать обобщением теоремы 2.7.

Теорема 2.8. Если данный граф является связным и имеет $2k$ вершин нечетной степени, то в нем можно провести k различных цепей, содержащих все его ребра в совокупности ровно по одному разу.

Теорема 2.9. Различных деревьев с n перенумерованными вершинами можно построить n^{n-2} .

Эта теорема известна, в основном, как вывод английского математика А. Кэли (1821-1895). Графы-деревья издавна привлекали внимание ученых. Сегодня двоичные деревья используются не только математиками, а и биологами, химиками, физиками и инженерами.

Теорема 2.10. Полный граф с пятью вершинами не является плоским.

Доказательство.

Воспользуемся формулой Эйлера:

Пусть M – множество таких цепей (скажем μ_{ij}) в G между концевыми вершинами x_i и $x_j \in X^-$, что никакие две цепи не имеют одинаковых конечных вершин, т.е. цепи соединяют различные пары вершин из X^- и покрывают все вершины множества X^- . Число цепей μ_{ij} в M равно $1/2 |X^-|$ и всегда цело, если конечно оно определено. Предположим теперь, что все ребра, образующие цепь μ_{ij} , теперь удвоены (добавлены *искусственные* ребра). Так поступаем с каждой цепью $\mu_{ij} \in M$ и полученный граф обозначим через $G^-(M)$. Так как некоторые ребра из G могут входить более чем в одну цепь μ_{ij} , то некоторые ребра из $G^-(M)$ могут быть (после того как добавлены все «новые» цепи μ_{ij}) утроены, учетверены и т.д.

Теорема 3.3. Для любого цикла, проходящего по G , можно выбрать множество M , для которого граф $G^-(M)$ имеет эйлеров цикл, соответствующий первоначально взятому циклу в графе G . Это соответствие таково, что если цикл проходит по ребру (x_i, x_j) из G l раз, то в $G^-(M)$ существует l ребер (одно реальное и $l - 1$ искусственных) между x_i и x_j , каждое из которых проходится ровно один раз эйлеровым циклом из $G^-(M)$. Справедливо и обратное утверждение.

Доказательство.

мизирующего общий километраж (или время, стоимость и т.д.).

с) *Проверка электрических, телефонных или железнодорожных линий.* Проблема инспектирования распределенных систем (лишь некоторые из которых названы выше) связана с непременным требованием проверки всех «компонент». Поэтому она также является проблемой типа 2) или близка к ней.

3.5. Задача китайского почтальона

Рассмотрим неориентированный граф $G(X, A)$. Среди вершин из X некоторые вершины (скажем из множества X^+) будут иметь четные степени, а остальные (из множества $X^- = X \setminus X^+$) – нечетные степени. Сумма степеней d_i всех вершин $x_i \in X$ равна удвоенному числу ребер в A (т.к. каждое ребро добавляет по единице к степеням двух его концевых вершин) и поэтому равна четному числу $2m$. Следовательно,

$$\sum_{x_i \in X} d_i = \sum_{x_i \in X^+} d_i + \sum_{x_i \in X^-} d_i = 2m$$

и так как первая сумма четна, то вторая сумма также четна. Но все d_i в последней сумме нечетны, значит число $|X^-|$ вершин нечетной степени четно.

$$B - P + \Gamma = 2,$$

где B – число вершин плоского графа, P – число его ребер, Γ – число граней. Формула Эйлера справедлива для плоских связных графов, в которых ни один из многоугольников не лежит внутри другого.

Эту формулу можно доказать методом математической индукции. Это доказательство мы опускаем. Заметим только, что формула справедлива и для пространственных многогранников. Пусть все пять вершин графа соединены друг с другом. Замечаем, что на графе нет ни одной грани, ограниченной только двумя ребрами. Если через φ_1 обозначить число таких граней, то $\varphi_2 = 0$. Далее рассуждаем от противного, а именно: предположим, что исследуемый граф плоский. Это значит, что для него верна формула Эйлера. Число вершин в данном графе $B = 5$, число ребер $P = 10$, тогда число граней

$$\Gamma = 2 - B + P = 2 - 5 + 10 = 7.$$

Это число можно представить в виде суммы:

$$\Gamma = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots,$$

где φ_3 – число граней, ограниченных тремя ребрами, φ_4 – число граней, ограниченных четырьмя ребрами и т. д.

С другой стороны, каждое ребро является границей двух граней, а поэтому число граней равно $2P$, в то же время

$$2P = 20 = 3\varphi_3 + 4\varphi_4 + \dots$$

Умножив равенство

$$G = 7 = \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5 + \dots$$

на три, получим

$$3G = 21 = 3(\varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5 + \dots).$$

Ясно, что

$$(3\varphi_3 + 3\varphi_4 + 3\varphi_5 + \dots) < (3\varphi_3 + 4\varphi_4 + 5\varphi_5 + \dots)$$

или $3G < 2P$, но по условию, $2P = 20$, а $3G = 21$; поэтому вывод, полученный при введенном нами предположении (граф плоский), противоречит условию. Отсюда заключаем, что полный граф с пятью вершинами не является плоским. \square

Теорема 2.11. (Теорема Понтрягина-Куратовского) Граф является плоским тогда и только тогда, когда он не имеет в качестве подграфа полного графа с пятью вершинами.

Теорема 2.12. Пусть G – неорграф без петель, имеющий хотя бы одно ребро. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) G – бихроматический граф;
- 2) G – двудольный граф;
- 3) G не содержит циклов нечетной длины.

Следствие: Если G – лес, то $\chi(G) \bullet 2$.

Оценим хроматическое число графа G через его параметры. Обозначим через $\deg(G)$ максимальную степень вершин графа G .

оптимальным, так как каждое ребро проходится по один раз и вес этого цикла равен тогда:

$$\sum_{j=1}^m c(a_j)$$

Сформулированная выше задача 2) называется *задачей китайского почтальона*, и ее решение имеет много потенциальных приложений, как например:

- a) *Сбор мусора.* Рассмотрим проблему сбора домашнего мусора. Допустим, что определенный район города обслуживается единственной машиной. Ребра графа G представляют дороги, а вершины – пересечения дорог. Величина $c(a_j)$ – вес ребра – будет соответствовать длине дороги. Тогда проблема сбора мусора в данном районе сводится к нахождению цикла в графе G , проходящего по каждому ребру G по крайней мере один раз. Требуется найти цикл с наименьшим километражем.
- b) *Доставка молока или почты.* Еще две задачи, когда требуется определить маршрут, проходящий хотя бы один раз по каждой из улиц, возникают при доставке молока или почты. Здесь задача состоит в нахождении маршрута, мини-

всегда возможно на каждом шаге. (Если $v = u$, то доказательство не меняется, если имеются ребра, инцидентные u). Покажем, что данная процедура приводит к эйлерову пути. Действительно, в G не может быть ребер, оставшихся не пройденными после использования последнего ребра, инцидентного u , поскольку в противном случае удаление ребра, смежного одному из оставшихся, привело бы к несвязному графу, что противоречит условию 2).

3.4. Некоторые родственные задачи

Сразу же укажем ряд вопросов, связанных с тем, имеется ли в неориентированном графе эйлеров цикл. Например:

- 1) Каково наименьшее число цепей или циклов необходимо для того, чтобы каждое ребро графа G содержалось точно в одной цепи или в одном цикле? Очевидно, что если G имеет эйлеров цикл или эйлерову цепь, то ответом будет число один.
- 2) Ребрам графа G приписаны положительные веса. Требуется найти цикл, проходящий через каждое ребро графа G по крайней мере один раз и такой, что для него общий вес (а именно сумма величин $n_j c(a_j)$, где число n_j показывает, сколько раз проходило ребро a_j , а $c(a_j)$ – вес ребра) минимален. Очевидно, что если G содержит эйлеров цикл, то любой такой цикл будет

Теорема 2.13. Для любого неорграфа G без петель выполняется неравенство $\mathcal{N}(G) \geq \deg(G) + 1$.

3. Эйлеровы циклы

3.1. Основные понятия и определения

Дадим строгое определение эйлерову циклу и эйлерову графу.

Определение 3.1. Если граф имеет цикл (не обязательно простой), содержащий все ребра графа по одному разу, то такой цикл называется *эйлеровым циклом*, а граф называется *эйлеровым графом*.

Определение 3.2. Если граф имеет цепь (не обязательно простую), содержащую все вершины по одному разу, то такая цепь называется *эйлеровой цепью*, а граф называется *полуэйлеровым графом*.

Ясно, что эйлеров цикл содержит не только все ребра по одному разу, но и все вершины графа (возможно, по несколько раз). Очевидно также, что эйлеровым может быть только связный граф.

Выберем в качестве вершин графа берега реки, а в качестве ребер – мосты, их соединяющие. После этого задача становится очевидной: требование неосуществимо – чтобы его выполнить, число дуг, приходящих к каждой вершине, должно быть четным. В самом деле, поскольку по одному мосту нельзя проходить дважды, каждому входу на берег должен соответствовать выход.

3.2. Критерий существования эйлерова цикла

Что необходимо, чтобы в графе существовал эйлеров цикл? Во-первых, граф должен быть связанным: для любых двух вершин должен существовать путь, их соединяющий. Во-вторых, для неориентированных графов число ребер в каждой вершине должно быть четным. На самом деле этого оказывается достаточно.

Теорема 3.1. Чтобы в связанном неориентированном графе G существовал эйлеров цикл, необходимо и достаточно, чтобы число вершин нечетной степени было четным.

Доказательство.

Необходимость. Любой эйлеров цикл должен прийти в вершину по одному ребру и покинуть ее по другому, так как любое ребро должно использоваться ровно один раз. Поэтому, если G содержит эйлеров цикл, то степени вершин должны быть четными.

Достаточность. Пусть G – связный неориентированный граф, все вершины которого имеют четную степень. Начнем путь из некоторой произвольной вершины x_0 и пойдем по некоторому ранее не использованному ребру к следующей вершине, и так до тех пор, пока не вернемся в вершину x_0 и не замкнем цикл. Если все ребра окажутся использованными, то нужный эйлеров цикл по-

Приведем теперь строгое обоснование корректности алгоритма Флэри построения эйлерового цикла в данном эйлеровом графе.

Теорема 3.2. Пусть $G(V, E)$ – эйлеров граф. Тогда следующая процедура всегда возможна и приводит к построению эйлерова цикла графа $G(V, E)$.

Выходя из произвольной вершины, идем по ребрам графа произвольным образом, соблюдая при этом следующие правила:

- 1) Стираем ребра по мере их прохождения (вместе с изолированными вершинами, которые при этом образуются);
- 2) На каждом шаге идем по мосту только в том случае, когда нет других возможностей.

Доказательство.

Убедимся сначала, что указанная процедура может быть выполнена на каждом этапе. Пусть мы достигли некоторой вершины v , начав с вершины u , $v \neq u$. Удалив ребра пути из v в u , видим, что оставшийся граф G_1 связан и содержит ровно две нечетных вершины v и u . Согласно следствию 2 из теоремы 1 граф G_1 имеет эйлеров путь P из v в u . Поскольку удаление первого ребра инцидентного u пути P либо не нарушает связности G_1 , либо происходит удаление вершины u и оставшийся граф G_2 связан с двумя нечетными вершинами, то отсюда получаем, что описанное выше построение

2. Пусть w – вершина, в которую мы пришли в результате выполнения 1 шага алгоритма и k – номер, присвоенный очередному ребру на этом шаге. Выбираем произвольное ребро инцидентное вершине w , причем мост выбираем только в крайнем случае, если других возможностей выбора ребра не существует. Присваиваем ребру номер $k + 1$ и вычеркиваем его. Процесс длится до тех пор, пока все ребра не вычеркнут.

Примечание: Мостом называется ребро (рис. 3.1),

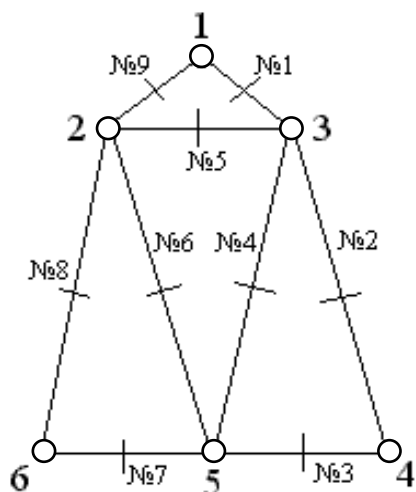


Рис. 3.1.

удаление которого лишает данный граф связности, т.е. увеличивает число компонент связности.

строен. Если же некоторые ребра не использованы, то пусть Φ – только что построенный цикл. Так как граф G связен, то цикл Φ должен проходить через некоторую вершину, скажем x_i , являющуюся конечной вершиной какого-либо до сих пор не использованного ребра. Если удалить все ребра, принадлежащие Φ , то в оставшемся графе все вершины по-прежнему будут иметь четную степень, так как в цикле Φ должно быть четное число ребер (0 является четным числом), инцидентных каждой вершине.

Начиная теперь с x_i , получаем цикл Φ' , начинающийся и оканчивающийся в x_i . Если все оставшиеся ранее ребра использованы для цикла Φ' , то процесс окончен. Нужный эйлеров цикл будет образован частью цикла Φ от вершины x_0 до x_i , затем циклом Φ' и, наконец, частью цикла Φ от вершины x_i до x_0 . Если же все еще остались неиспользованные ребра, то объединение построенных выше циклов Φ и Φ' дает новый цикл Φ . Мы снова можем найти вершину x_j , принадлежащую циклу и являющуюся концевой вершиной некоторого неиспользованного ребра. Затем мы можем приступить к построению нового цикла Φ' , начинавшегося в x_j , и так до тех пор, пока не будут использованы все ребра и не будет получен таким образом эйлеров цикл Φ . Это доказывает теорему. \square

Хотя доказательство проведено для неориентированных графов, оно сразу переносится на ориентированные, только требование четности заменяется теперь на такое: число входящих в каждую вершину ребер должно быть равно числу выходящих.

Следствие 1. Для связного эйлерова графа G множество ребер можно разбить на простые циклы.

Следствие 2. Для того чтобы связный граф G покрывался единственной эйлеровой цепью, необходимо и достаточно, чтобы он содержал ровно 2 вершины с нечетной степенью. Тогда цепь начинается в одной из этих вершин и заканчивается в другой.

3.3. Алгоритмы построения эйлерова цикла

Выше был установлен эффективный способ проверки наличия эйлерова цикла в графе. Для этого достаточно убедиться, что степени всех вершин четные. Предложенный в доказательстве алгоритм линеен, т.е. число действий прямо пропорционально числу ребер.

Алгоритм построения эйлерова цикла в эйлеровом графе

Вход: Эйлеров граф $G(V, E)$, заданный матрицей смежности. Для простоты укажем, что $\Gamma[v]$ – множество вершин, смежных с вершиной v .

Обоснование алгоритма: Принцип действия этого алгоритма заключается в следующем. Начиная с произвольной вершины, строим путь, удаляя ребра и запоминая вершины в стеке, до тех пор, пока множество смежности очередной вершины не окажется пустым, что означает, что путь удлинить нельзя. Заметим, что при этом мы с необходимостью приходим в ту вершину, с которой начали. В противном случае это означало бы, что вершина v имеет нечетную степень, что невозможно по условию. Таким образом, из графа были удалены ребра цикла, а вершины цикла были сохранены в стеке S . Заметим, что при этом степени всех вершин остались четными. Далее вершина v выводится в качестве первой вершины эйлерова цикла, а процесс продолжается, начиная с вершины, стоящей на вершине стека.

Приведем еще один алгоритм построения эйлерова цикла в эйлеровом графе – это *Алгоритм Флэри*, он позволяет пронумеровать ребра исходного графа так, чтобы номер ребра указывал каким по счету это ребро войдет эйлеров цикл.

Алгоритм Флэри

1. Начиная с любой вершины v , присваиваем ребру vu номер 1. Вычеркиваем это ребро из списка ребер и переходим к вершине u .